# Notas de Clase
# Microeconomía Avanzada

María Florencia Gabrielli
*CONICET-UNCuyo*

Agosto - 2016
Facultad de Ciencias Económicas - UNCuyo

# Índice general

# Prólogo

Estas notas de clase surgen como producto del dictado durante 2014 y 2015 de Microeconomía Avanzada en el programa de Doctorado en Ciencias Económicas de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Cuyo. Este material está pensado para un curso de un semestre de duración. Los temas abordados pueden consultarse en cualquier libro de texto de Microeconomía Avanzada, no obstante el material aquí expuesto se basa particularmente en el libro de Rubinstein [2012].

Agradezco especialmente a mi colega, la Dra. Virginia Vera de Serio por su apoyo constante y por incentivarme a publicar estas notas. Agradezco a mis compañeros de cátedra Gustavo Maradona y María Inés Lara quienes se han sumado al equipo de "Microeconmía" con importantes contribuciones. Agradezco también a mis alumnos, en particular Agusto Bou, Valentín Kuschnaroff, y Pablo Mahnic que con sus comentarios y observaciones han colaborado para mejorar la calidad de estas notas. Finalmente agradezco a la Editorial de la Facultad de Ciencias Económicas la oportunidad de poder difundir este material.

# Capítulo 1

# Preferencias

## 1.1. Introducción

Comenzaremos este curso formulando la noción de “preferencias” independientemente del concepto de “elección”. Más adelante veremos cómo se relacionan estos dos conceptos.

En particular veremos en esta clase el tema de las preferencias de los consumidores como una actitud mental del individuo (agente económico) que le permite distinguir alternativas independientemente de la elección final que realice. Vamos a desarrollar una formalización rigurosa de este concepto que juega un rol central en economía.

Es importante notar que no estamos pensando en preferencias solamente circunscriptas a un contexto de elección. Por ejemplo, podemos hablar sobre los gustos que un individuo puede tener en relación a obras de arte aún cuando este individuo nunca tome una decisión basada en estas preferencias.

Imaginemos que queremos describir las preferencias de un agente con respecto a los elementos de un conjunto $X$. Este conjunto puede contener cualquier tipo de elementos. Ej: universidades donde hacer un doctorado.

Las preguntas naturales que surgen son:

1. ¿Qué condiciones debe cumplir una completa descripción?

2. ¿Qué elementos debe incluir esta descripción?

El enfoque que vamos a adoptar es que la descripción de las preferencias debe especificar completamente las actitudes que un agente tiene en relación a un par de elementos en $X$. Para cada par de alternativas esta descripción debe proveer una respuesta a la pregunta de cómo un agente compara las dos alternativas.

Vamos a estudiar dos enfoques que responden a la siguiente pregunta: ¿Cómo un agente compara un par de alternativas?. Para cada versión formularemos los requerimientos de consistencia necesarios para que las respuestas sean “preferencias” y examinaremos la conexión entre estas dos formalizaciones.

Los enfoques que vamos a ver son:

1. El cuestionario R.
2. El cuestionario Q.

De esta manera definiremos a las preferencias como las respuestas “válidas” a cada uno de estos cuestionarios. Luego vamos a establecer la equivalencia de ambas maneras de definir preferencias.

## 1.2. El cuestionario Q

$Q(x, y)$ $(\forall x \neq y \in X)$. ¿Cómo compara ud. $x$ con respecto a $y$?. Sólo puede marcar una de las alternativas.

- Yo prefiero $x$ a $y$ (denotado $x \succ y$).
- Yo prefiero $y$ a $x$ (denotado $y \succ x$).
- Yo estoy indiferente entre $x$ e $y$ (denotado $I$).

Una respuesta “válida” al cuestionario implica elegir solamente una de las opciones. De esta manera se excluyen respuestas que demuestran lo siguiente:

1. Falta de capacidad de comparación: por ej:
   - $x$ e $y$ son incomparables.
   - No sé que es $x$.
   - No tengo opinión formada.
   - Prefiero tanto $x$ sobre $y$ que $y$ sobre $x$.
2. Dependencia de otros factores, por ejemplo:
   - Depende de lo que opinen mis padres.
   - Depende de las circunstancias (algunas veces prefiero $x$, pero usualmente prefiero $y$).
3. Intensidad de las preferencias.
   - De alguna manera prefiero $x$.
   - Adoro $x$ y odio $y$.

Por lo tanto, 1., 2. y 3. constituyen restricciones que hemos puesto sobre las respuestas “válidas” de los agentes y las mismas son nuestros supuestos implícitos. De manera particular, son importantes los supuestos que hacemos sobre la compatibilidad de los elementos de $X$ (i.e., que dichos elementos son comparables) y el hecho de que ignoramos la intensidad de las preferencias. En términos formales podríamos ver a las respuestas válidas al cuestionario $Q$ como una función $f$ que asigna a cualquier par $(x, y)$ de elementos distintos de $X$ exactamente uno de los tres posibles “valores”:

1. $x \succ y$.

2. $y \succ x$.

3. $I$.

con la interpretación que $f(x, y)$ es la respuesta a la pregunta $Q(x, y)$. También podríamos adoptar la convención que $x \succ y = 1$, $y \succ x = 2$ e $I = \times$, por lo tanto tendríamos $f(x, y) = 1$ si la respuesta a $Q(x, y)$ es $x \succ y$, etc.

Es importante destacar que no todas las respuestas "válidas" al cuestionario $Q$ califican como preferencias sobre el conjunto $X$. Para que una respuesta sea una preferencia vamos a adoptar dos restricciones de consistencia.

1. La respuesta a $Q(x, y)$ debe ser idéntica a la respuesta a $Q(y, x)$, (i.e., $f(x, y) = f(y, x)$).

   Esto excluye lo que se conoce como *framing effect* (efecto orden) por el cual la gente tiende a preferir el primer elemento mencionado cuando se enfrenta a la decisión entre dos alternativas.

2. Requerimos que las respuestas a $Q(x, y)$ y a $Q(y, z)$ sean consistentes con la respuesta a $Q(x, z)$, de la siguiente manera:

   - Si las respuestas a las dos preguntas $Q(x, y)$ y $Q(y, z)$ son: $x \succ y$ ($x$ es preferida a $y$) y $y \succ z$ ($y$ es preferida a $z$), entonces la respuesta a $Q(x, z)$ deber ser $x \succ z$ ($x$ es preferida a $z$).
   - Si las respuestas a las dos preguntas $Q(x, y)$ y $Q(y, z)$ son "indiferente" (i.e. $I$), entonces también lo es la respuesta a $Q(x, z)$.

Vamos a resumir estas dos restricciones en la siguiente formalización de la noción de preferencias.

**Definición 1** *Las preferencias sobre un conjunto $X$ se definen como una función $f$ que asigna a cualquier par de elementos distintos de $X$, $(x, y)$ exactamente uno de los siguientes tres valores:*

*1.* $x \succ y$.

*2.* $y \succ x$.

*3.* $I$.

*de manera tal que para tres elementos distintos $x, y, z$ que pertenecen a $X$ las siguientes dos propiedades se cumplen:*

**A-** *Ausencia de efecto orden:* $f(x, y) = f(y, x)$

**B-** *Transitividad:*

$$si\ f(x,y) = x \succ y\ y\ f(y,z) = y \succ z,\ entonces\ f(x,z) = x \succ z,$$
$$si\ f(x,y) = I\ y\ f(y,z) = I,\ entonces\ f(x,z) = I.$$

*En el caso que* $x = y$, $f(x,y) = I$.

## 1.3. Transitividad

Vamos a discutir esta propiedad con un mayor nivel de profundidad. La transitividad es una característica atractiva de las preferencias. Pensemos cómo reaccionaríamos si alguien nos dice lo siguiente:

"yo prefiero $x$ a $y$ ($x \succ y$) y también $y$ a $z$ ($y \succ z$) y $z$ a $x$ ($z \succ x$)"

Probablemente este tipo de respuesta nos parecería confusa, más aún si a esta persona le hacemos ver que su respuesta es "intransitiva", probablemente se avergonzaría de la misma.

Más allá del sentido común, detrás de la propiedad de transitividad es importante recalcar que cuando asumimos que la actitud de un individuo hacia pares de alternativas es transitiva, estamos excluyendo a individuos que basan sus juicios de valor en procedimientos que causan violaciones sistemáticas de la transitividad. Veamos algunos ejemplos.

1. Agregación de consideraciones como fuente de intransitividad.

   En algunas ocasiones la actitud de un individuo se deriva de la agregación de consideraciones más básicas. Pensemos por ejemplo en el caso en que $X = \{a, b, c\}$ y que el individuo tiene tres consideraciones primitivas en mente, (1, 2, 3). El individuo encuentra que $x$ es una mejor alternativa que $y$ ($x \succ y$) si la mayoría de las consideraciones que el individuo hace favorecen a $x$. Este proceso de agregación puede derivar en preferencias no transitivas. Por ejemplo si las tres consideraciones rankean las alternativas de la siguiente manera:

   i. $a \succ_1 b \succ_1 c$
   ii. $b \succ_2 c \succ_2 a$
   ii. $c \succ_3 a \succ_3 b$

   entonces el individuo determina: $a \succ b$, $b \succ c$, $c \succ a$, lo cual viola la transitividad.

2. Las similaridades como un obstáculo para la transitividad.

   En algunos casos un individuo puede expresar indiferencia en la comparación entre dos elementos que son "muy" cercanos para ser distinguidos. Por ejemplo.

   Sea $X = I\!R$. Consideremos un individuo cuya actitud hacia las alternativas es "mientras mayor, mejor". De todas maneras el individuo encuentra imposible determinar si $a$ es mejor que $b$ a menos que la diferencia entre $a$ y $b$ sea de por lo menos 1 unidad. Este individuo asignará lo siguiente:

* $f(x,y) = x \succ y$ si $x \geq y + 1$.
* $f(x,y) = I$ si $|x - y| < 1$.

Esta forma de asignar valores a $f$ NO define una relación de preferencia dado que: $1,5 \sim 0,8$ y $0,8 \sim 0,3$, pero nos es verdad que $1,5 \sim 0,3$.

Una pregunta natural que surge es entonces si los requisitos de la Definición 1 son insuficientes para definir preferencias. En otras palabras ¿son demasiado débiles los supuestos que hemos impuesto en la Definición 1? o son suficientes para definir el concepto de preferencias. Veamos un ejemplo.

Si $f(x,y) = x \succ y$ y $f(y,z) = I$, naturalmente esperaríamos que $f(x,z) = x \succ z$.

No obstante esta condición o supuesto adicional no forma parte de los dos requerimientos (A y B) dados en la Definición 1. La razón es la siguiente: esta última condición está implícita, es decir si se cumplen A y B en la Definición 1, se cumple esta condición y por lo tanto no es necesario imponerla ya que es consecuencia de A y B. Veamos el razonamiento detrás de esta afirmación. Para esto es suficiente con ver qué sucede con los otros dos casos restantes, $f(x,z) = I$ y $f(x,z) = z \succ x$.

**i** Si $f(x,z) = I$, entonces dado el supuesto que $f(y,z) = I$ y por la condición de Ausencia de efecto orden (condición A), se sigue que $f(z,y) = I$ y por lo tanto dada la condición de Transitividad (condición B) se tiene que $f(x,y) = I$, lo que es una contradicción. Luego $f(x,z) = I$ no es un caso posible.

**ii** Alternativamente si $f(x,z) = z \succ x$, luego por la condición A (Ausencia de efecto orden) tenemos que $f(z,x) = z \succ x$ y dado que $f(x,y) = x \succ y$, se sigue que por transitividad tenemos $f(z,y) = z \succ y$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto la condición implícita a la que hacemos referencia más arriba se cumple si A y B se cumplen (ya que los otros dos casos no pueden darse porque derivan en una contradicción).

Similarmente hay que notar que para cualquier función de preferencias $f$ tenemos que,

$$\text{si } f(x,y) = I \text{ y } f(y,z) = y \succ z, \text{ luego } f(x,z) = x \succ z.$$

La prueba de este argumento es similar a la que acabamos de realizar.

## 1.4. El cuestionario R

Pasamos ahora a ver el segundo enfoque que analiza la manera de definir preferencias. Al igual que en el caso anterior, este es un cuestionario imaginario que nos ayuda a entender cómo pueden definirse las preferencias.

$R(x, y)$ ($\forall x, y \in X$, no necesariamente distintas, i.e. $x = y$ es posible). ¿Es $x$ al menos tan preferida como $y$?. Sólo puede marcar una de las alternativas.

- Si.
- No

El cuestionario R está formado por preguntas del tipo: $R(x, y)$. $R(y, x)$, $R(x, x)$ y $R(y, y)$. Una respuesta "válida" en este caso implica que el encuestado marque exactamente una sola alternativa en cada caso. Para que una respuesta válida pueda definir preferencias también deben cumplirse dos condiciones:

1. La respuesta a al menos una de las preguntas $R(x, y)$ y $R(y, x)$ debe ser SI (particularmente la pregunta ingenua $R(x, x)$ debe tener un SI como respuesta).
2. Para cada $x, y, z \in X$, si las respuestas a las preguntas $R(x, y)$ y $R(y, z)$ son SI, entonces también lo es la respuesta a la pregunta $R(x, z)$.

Desarrollemos notaciones útiles para identificar las respuestas a este cuestionario a través de la relación binaria $\succsim$ sobre los elementos de $X$, en particular definimos que

$$x \succsim y \text{ si la respuesta a la pregunta } R(x, y) \text{ es SI.}$$

En otras palabras "$x \succsim y$ se lee como $x$ es al menos tan preferida como $y$". Estamos ahora en condiciones de dar la Definición 2 de preferencias según el cuestionario R.

**Definición 2** *Las preferencias sobre un conjunto $X$ están dadas por la relación binaria $\succsim$ sobre $X$ que satisface lo siguiente:*

**I-** *Completitud: para cualquier $x, y \in X$, $x \succsim y$ o $y \succsim x$ (i.e. siempre se puede comparar).*

**II-** *Transitividad: para cualquier $x, y, z \in X$, si $x \succsim y$ e $y \succsim z$, entonces $x \succsim z$.*

## 1.5. Equivalencia entre las Definiciones 1 y 2

Ahora vamos a estudiar que en cierto sentido las dos definiciones dadas son equivalentes. Antes es importante recordar algunas herramientas de análisis real.

- La función $f : X \to Y$ es una función *inyectiva* (one to one mapping) si:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Otra forma alternativa de definir una función inyectiva es si para cualquier $x_1, x_2 \in X$:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Figura 1.1: Función Inyectiva

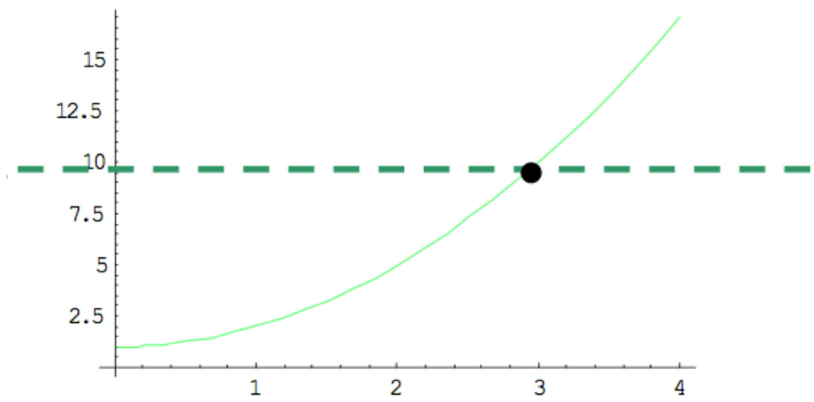
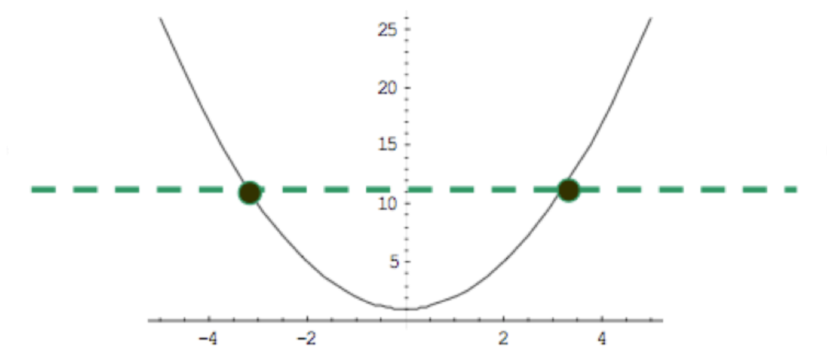



Figura 1.2: Función NO Inyectiva




- La función $f : X \to Y$ es una función *sobreyectiva o suryectiva* (onto mapping) si:

$$\forall y \in Y\, \exists x \in X \,\text{tal que} f(x) = y.$$

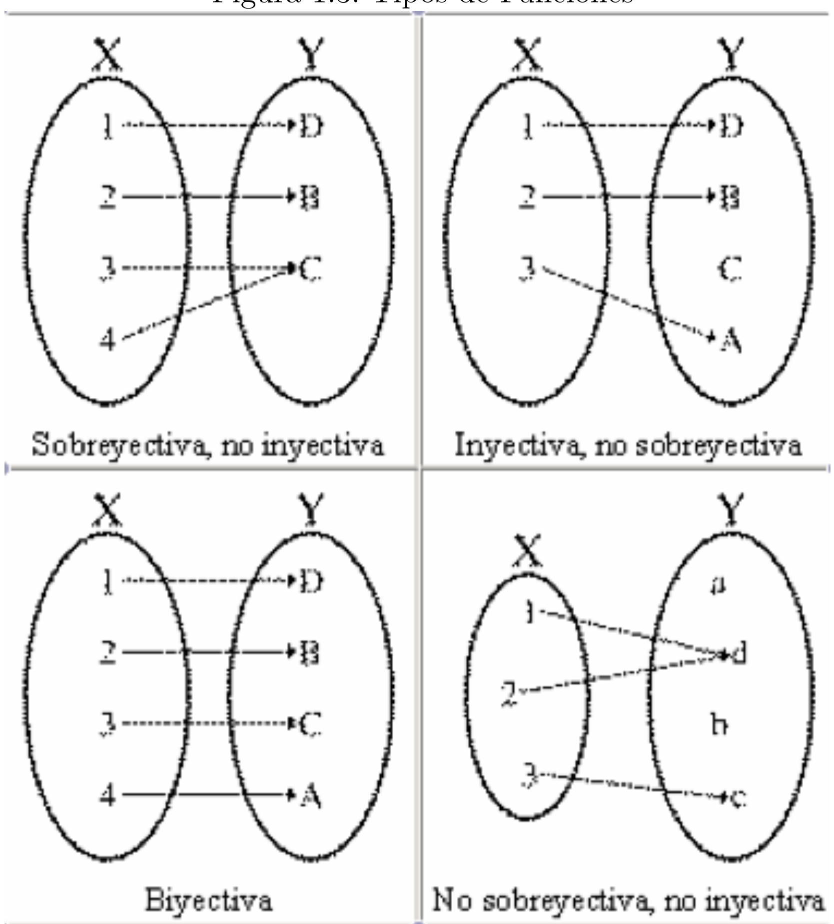
Es decir que es suryectiva si y solo si para todo elemento $y \in Y$ (conjunto de llegada) existe al menos un elemento $x \in X$ (dominio) tal que $y = f(x)$.

- La función $f: X \to Y$ es una función *biyectiva o correspondencia uno a uno* (one to one and onto mapping) si:

$$\forall y \in Y \ \exists! x \in X \ \text{tal que} f(x) = y.$$

Es decir que es biyectiva si $f$ es inyectiva y suryectiva a la vez, o sea verifica las dos condiciones dadas anteriormente. En otras palabras, si y solo si para todo elemento $y \in Y$ (conjunto de llegada) existe un único elemento $x \in X$ (dominio) tal que $y = f(x)$.

Figura 1.3: Tipos de Funciones




Cuando pensamos en la equivalencia entre ambas definiciones en economía, estamos pensando en algo que va más allá de la existencia de una función biyectiva entre ambas definiciones, en particular la correspondencia uno-a-uno también tiene que preservar la interpretación. A los efectos de mostrar la equivalencia entre ambas definiciones vamos a construir una función biyectiva (one to one and onto mapping) que llamaremos "Traducción" entre las respuestas a $Q$ que califican como preferencias según la primer definición y las respuestas a $R$ que califican como preferencias de acuerdo a la segunda definición de manera que la correspondencia preserve el significado de las respuestas a los dos cuestionarios.

Para ilustrar lo que queremos hacer, imaginemos que tenemos dos libros. Cada página del primer libro es una respuesta al cuestionario $Q$ que califica como preferencia según la primer definición. Cada página del segundo libro es una respuesta al cuestionario $R$ que califica como preferencia de acuerdo a la segunda definición. La correspondencia hace coincidir cada página del primer libro con una única página del segundo libro, de manera que una persona racional reconocerá que las diferentes respuestas a los dos cuestionarios reflejan la misma actitud mental hacia las alternativas.

Dado que asumimos que las respuestas a todas las preguntas del tipo $R(x,x)$ son SI, la clasificación de una respuesta a $R$ como preferencia solamente requiere que especifiquemos preguntas del cuestionario $R(x,y)$ con $x \neq y$ (este es el caso relevante). La siguiente tabla muestra este procedimiento de traducción.

Cuadro 1.1: Correspondencia de Traducción

| Una respuesta a $Q(x,y)$ y $Q(y,x)$ | Una respuesta a $R(x,y)$ y $R(y,x)$ |
|---|---|
| $x \succ y$ | SI,NO |
| $I$ | SI,SI |
| $y \succ x$ | NO,SI |

Esta traducción preserva la interpretación que hemos dado a las respuestas. Podemos leer este cuadro de la siguiente manera:

1. $Q(x,y) = x \succ y \iff R(x,y) = \text{SI y } R(y,x) = \text{NO}$
2. $Q(x,y) = I \iff R(x,y) = \text{SI y } R(y,x) = \text{SI}$
3. $Q(x,y) = y \succ x \iff R(x,y) = \text{NO y } R(y,x) = \text{SI}$

Las siguientes observaciones constituyen la demostración formal que la función *Traducción* es en realidad una correspondencia uno a uno (o biyectiva) entre el conjunto de preferencias dado por la definición 1 y el conjunto de preferencias dado por la definición 2.

- Por el supuesto sobre $Q$ de ausencia de efecto orden, para cualquier par de alternativas $x$ e $y$, una y solamente una de las siguientes tres respuestas pueden haber sido dadas tanto para $Q(x,y)$ como para $Q(y,x)$: $x \succ y$, $I$ e $y \succ x$. Por lo tanto las respuestas a $R(x,y)$ y a $R(y,x)$ están bien definidas (ver cuadro).

- Luego verificamos que la respuesta a $R$ que hemos construido en el cuadro es en realidad una relación de preferencias (según la segunda definición).

**I-** Completitud: en cada una de las tres filas, las respuestas a al menos una de las preguntas $R(x, y)$ y $R(y, x)$ es afirmativa (i.e. siempre se puede comparar).

**II-** Transitividad: asumamos que las respuestas a $R(x, y)$ y $R(y, z)$ son afirmativas. Esto implica que la respuesta a $Q(x, y)$ es $x \succ y$ o $I$ y que la respuesta a $Q(y, z)$ es $y \succ z$ o $I$. La transitividad de $Q$ implica que la respuesta a $Q(x, z)$ debe ser $x \succ z$ o $I$, y por lo tanto la respuesta a $R(x, z)$ debe ser afirmativa.

- Para ver que la función *Traducción* es en realidad una función inyectiva (one to one mapping), hay que notar que para dos respuestas distintas (cualquiera sean) al cuestionario $Q$ debe existir una pregunta $Q(x, y)$ para la cual las respuestas difieran; por lo tanto, la respuesta respectiva a tanto $R(x, y)$ o $R(y, x)$ deben ser distintas.

- Resta mostrar que la imagen (o rango) de la función *Traducción* incluye todas las preferencias posibles según las define la segunda definición. Sea $\succsim$ el símbolo que define las preferencias en el sentido tradicional (una respuesta a $R$). Debemos especificar una función $f$, es decir una respuesta a $Q$, la cual es convertida a $\succsim$ por medio de la función *Traducción*. Al leer de derecha a izquierda, la tabla anterior nos provee dicha función.

  Por el supuesto de completitud de $\succsim$, para cualquier par de elementos $x$ e $y$, una de las entradas en la columna de la derecha es aplicable (notar que la cuarta opción que establece que las dos respuestas a $R(x, y)$ y $R(y, x)$ son NO está excluida), y por lo tanto la respuesta a $Q$ está bien definida y por definición satisface el efecto de ausencia de orden.

- Finalmente nos queda chequear que $f$ satisface la condición de transitividad.

  **i.** Si $f(x, y) = x \succ y$ y $f(y, z) = y \succ z$, entonces $x \succsim y$ y no es cierto que $y \succsim x$ también es cierto que $y \succsim z$ y no es cierto que $z \succsim y$. Dada la transitividad de $\succsim$, tenemos que $x \succsim z$. Adicionalmente como no es cierto que $z \succsim x$ dado que si fuera esto cierto, entonces la transitividad de $\succsim$ implicaría que $z \succsim y$.

  **ii.** Si $f(x, y) = I$ y $f(y, z) = I$, entonces $x \succsim y$, $y \succsim x$, $y \succsim z$ y $z \succsim y$. Por la transitividad de $\succsim$, se cumple que tanto $x \succsim z$ y $z \succsim x$, y por lo tanto $f(x, z) = I$.

## 1.6. Resumen

Podríamos haber resumido todos esta clase en las siguientes dos oraciones:

1. Las preferencias sobre un conjunto $X$ son una relación binaria $\succsim$ sobre el conjunto $X$ que satisface completitud y transitividad.

2. Notar que $x \succ y$ corresponde al caso en que se dan estas dos condiciones: $x \succsim y$ y no es cierto que $y \succsim x$. El caso $x \sim y$ se da cuando $x \succsim y$ y también $y \succsim x$.

No obstante, la idea de haber desarrollado el contenido de este capítulo no era solamente para introducir una definición formal de preferencias, sino que también queríamos desarrollar un ejercicio de modelización y establecer los siguientes dos puntos metodológicos:

1. Cuando se introducen dos formalizaciones sobre el mismo concepto verbal, debemos asegurarnos que en realidad ambas conlleven el mismo significado.

2. Cuando desarrollamos un concepto formal, hacemos supuestos implícitos más allá de aquellos mencionados explícitamente. Estar al tanto de los supuestos implícitos es importante para entender el concepto y es útil a la hora de desarrollar formalizaciones alternativas.

**Referencias**

- [Rubinstein, 2012]: Capítulo 1.
- [Mas-Colell et al., 1995]: Capítulo 1, A-B.
- [Kreps, 1990], 17-24.
- [Fishburn, 1970] contiene un tratamiento detallado sobre relaciones de preferencia.

# Capítulo 2

# Utilidad

## 2.1. Representación en términos de utilidad: concepto

Frecuentemente describimos una relación de preferencias como un listado ordenado de mejor a peor. En algunos casos, las alternativas se agrupan en un número menor de categorías y de esta manera describimos las preferencias sobre $X$ especificando las preferencias sobre el conjunto de categorías. La mayoría de los ejemplos que nos vienen a la mente son de la siguiente manera: "Yo prefiero el jugador de basket más alto", "Yo prefiero el regalo más caro", "Yo prefiero al profesor que da mayores notas", "Yo prefiero ingerir menos calorías". Lo común a todos estos ejemplos es que ellos pueden naturalmente ser especificados a través de una sentencia de la forma "$x \succsim y$ si $V(x) \geq V(y)$" (o $V(x) \leq V(y)$) donde $V : X \to I\!R$ es una función que asigna un número real a cada elemento del conjunto de alternativas en $X$.

Ejemplo: Las preferencias dadas por "Yo prefiero al jugador de basket más alto", pueden expresarse formalmente por: $X$ es el conjunto de todos los posibles jugadores de basket, y $V(x)$ es la altura del jugador $x$.

Es importante notar que la declaración $x \succsim y$ si $V(x) \geq V(y)$ siempre define una relación de preferencias dado que la relación $\geq$ sobre $I\!R$ satisface completitud y transitividad.

Aún cuando la descripción de una relación de preferencias no involucre una evaluación numérica, estamos interesados en una representación numérica equivalente.

**Definición 3** *Decimos que la* ***función*** $U : X \to I\!R$ *representa las preferencias* $\succsim$ *si para todo* $x$ *e* $y$ *pertenecientes a* $X$ $(\forall x, y \in X)$, $x \succsim y$ *si y solo si* $U(x) \geq U(y)$.

*Si la función* $U$ *representa la relación de preferencias* $\succsim$*, nos referimos a ella como la* ***función de utilidad*** *y decimos que* $\succsim$ *tiene una representación en términos de utilidad.*

Es posible evitar la noción de representación en términos de utilidad y "hacer análisis económico" solamente con la noción de preferencias. Sin embargo, usualmente trabajamos con funciones de utilidad en lugar de preferencias como un medio de describir las actitudes que un agente económico toma con respecto a las alternativas. Esto es así probablemente, porque encontramos más conveniente hablar de la maximización de una función numérica que la maximización de una relación de preferencias.

La función de utilidad no tiene otro significado más que el de representar una relación de preferencias. Los números absolutos carecen de significado en el caso de las preferencias; solamente un orden relativo tiene significado. De hecho, si una relación de preferencias tiene una representación en términos de utilidad, entonces tiene asociado un número infinito de dichas representaciones. Esto se demuestra en la siguiente afirmación.

**Afirmación**
Si $U$ representa $\succsim$, entonces para cualquier función estrictamente creciente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función $V(x) = f(U(x))$, también representa a $\succsim$.

**Demostración**

$$\begin{aligned}
& a \succsim b \\
\iff & U(a) \geq U(b) \text{ (dado que } U \text{ representa } \succsim) \\
\iff & f(U(a)) \geq f(U(b)) \text{ (dado que } f \text{ es estrictamente creciente)} \\
\iff & V(a) \geq V(b).
\end{aligned}$$

## 2.2. Representación en términos de utilidad: existencia

Si cualquier relación de preferencias pudiera ser representada por una función de utilidad, entonces esto nos garantizaría el uso de funciones de utilidad en lugar de relaciones de preferencias sin pérdida de generalidad. La teoría de la utilidad estudia la posibilidad de usar funciones numéricas para representar relaciones de preferencias y también estudia la posibilidad de que las representaciones numéricas conlleven un significado adicional (como por ejemplo, $a$ es preferido a $b$ más de lo que $c$ es preferido a $d$).

Examinaremos ahora el interrogante básico de la teoría de la utilidad: ¿Bajo qué condiciones o supuestos existe una representación en términos de utilidad?. Al respecto tenemos dos casos para analizar, el primero de los cuales es bastante trivial.

1. Cuando el conjunto $X$ es finito, siempre existe una representación en términos de utilidad.

2. Cuando el conjunto $X$ numerable, siempre existe una representación en términos

de utilidad.[1]

Con respecto al primer caso ($X$ finito) vamos a desarrollar la prueba detallada principalmente para acostumbrarnos al uso de precisión analítica. Comenzamos la demostración con un Lema sobre la existencia de elementos mínimos (un elemento $a \in X$ es mínimo si $a \precsim x$ para cualquier $x \in X$).

**Lema**
En cualquier conjunto finito $A \subseteq X$ existe un elemento mínimo (similarmente, también existe un elemento máximo).

**Demostración**
Por inducción sobre el tamaño de $A$. Si $A$ es un conjunto unitario, entonces por completitud su único elemento es mínimo. Para hacer la inducción, asumamos que la cardinalidad de $A$ es $n+1$ y sea $x \in A$. El conjunto $A - \{x\}$ tiene cardinalidad $n$ y por el supuesto de inducción tiene un elemento mínimo denotado $y$. Si $x \succsim y$, entonces $y$ es mínimo en $A$. Si $y \succsim x$, entonces por transitividad $z \succsim x$ para todo $z \in A - \{x\}$ y por lo tanto $x$ es mínimo.

**Afirmación 1**
Si $\succsim$ es una relación de preferencias sobre un conjunto finito $X$, entonces $\succsim$ tiene una representación en términos de utilidad en el conjunto de los números naturales.

**Demostración**
Construiremos una sucesión de conjuntos de manera inductiva. Sea $X_1$ el subconjunto de elementos que son mínimos en $X$, por el lema anterior, $X_1$ no es el conjunto vacío. Asumamos que hemos construido los conjuntos $X_1, \ldots, X_k$. Si $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$, estamos listos. Caso contrario, definamos $X_{k+1}$ como el conjunto de los elementos mínimos en $X - X_1 - X_2 - \cdots - X_k$. Por el lema anterior, $X_{k+1} \neq \emptyset$. Dado que $X$ es finito debemos terminar la prueba luego de como máximo $|X|$ pasos. Definamos $U(x) = k$ si $x \in X_k$. Luego, $U(x)$ es el número de paso en el cual $x$ es "eliminado". Para verificar que $U$ representa $\succsim$, sea $a \succsim b$. Entonces, $a \notin X_1 \cup X_2 \cup \ldots X_{U(b)-1}$ y por lo tanto $U(a) \geq U(b)$. En la otra dirección si $U(a) \geq U(b)$, entonces $a \succsim b$ ya que $a$ es "eliminado" luego de $b$.

Sin hacer supuestos adicionales sobre las preferencias, la existencia de una representación en términos de utilidad está garantizada cuando el conjunto $X$ es numerable (recordar que $X$ es infinito numerable si existe una función uno a uno desde los números naturales hacia $X$, es decir, es posible hacer un listado de todos sus miembros $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$).

[1] En matemáticas, un conjunto es numerable cuando sus elementos pueden ponerse en correspondencia uno a uno con el conjunto de los números naturales o un subconjunto finito del mismo.

Pasamos ahora a demostrar la segunda afirmación sobre la existencia de una representación de utilidad mencionada más arriba.

**Afirmación 2**
Si $X$ es numerable, entonces cualquier relación de preferencias sobre $X$ tiene una representación en términos de utilidad con rango en (-1,1).

**Demostración**
Sea $x_n$ una enumeración de todos los elementos en $X$. Construiremos la función de utilidad inductivamente. Fijemos $U(x_1) = 0$. Asumamos que hemos completado la definición de los valores $U(x_1), \ldots, U(x_{n-1})$ de manera que $x_k \succsim x_\ell$ si y solo si $U(x_k) \geq U(x_\ell)$. Si $x_n$ es indiferente a $x_k$ para algún $k < n$, entonces asignamos $U(x_n) = U(x_k)$. De lo contrario, por transitividad todos los números en el conjunto no vacío $\{U(x_k)|x_k \prec x_n\} \cup \{-1\}$ están por debajo de todos los números del conjunto no vacío $\{U(x_k)|x_n \prec x_k\} \cup \{1\}$. Escojamos a $U(x_n)$ como un número entre los dos conjuntos. Esto garantiza que para cualquier $k < n$ tenemos que $x_n \succsim x_k$ si y solo si $U(x_n) \geq U(x_k)$. Luego la función que definimos sobre $\{x_1, \ldots, x_n\}$ representa las preferencias sobre dichos elementos.

Para completar la prueba de que $U$ representa a $\succsim$, tomemos cualquier par de elementos $a$ y $b \in X$. Para algún $k$ y $\ell$ tenemos que $a = x_k$ y $b = x_\ell$. El desarrollo anterior aplicado a $n = \max(k, \ell)$ nos da como resultado $x_k \succsim x_\ell$ si y solo si $U(x_k) \geq U(x_\ell)$.

## 2.3. Preferencias Lexicográficas

De manera intuitiva podemos definir a las preferencias lexicográficas como el resultado de aplicar el siguiente procedimiento para determinar el ranking entre dos elementos cualquiera del conjunto $X$. El individuo tiene en mente una secuencia de criterios que pueden ser utilizados para comparar pares de elementos en $X$. Los criterios son aplicados en un orden fijo hasta que un criterio resulta exitoso en distinguir entre los dos elementos de manera de determinar la alternativa preferida. El nombre "preferencias lexicográficas" proviene de la forma en que un diccionario está organizado; esto es, el bien 1 tiene la mayor prioridad en determinar el orden de preferencias, tal como la primer letra de una palabra lo hace en el orden de un diccionario. Cuando el nivel de la primer componente es el mismo en dos canastas, la cantidad del segundo bien en ambas canastas determina las preferencias del individuo. Formalmente.

**Definición 4** *Sea $(\succsim_k)_{k=1,\ldots,K}$ un vector de orden $K$ que denota el ordenamiento sobre el conjunto $X$. El orden lexicográfico inducido por dichos ordenamientos se define por*

$$x \succsim_L y$$

*si:*

1. *existe un $k^*$ tal que para todo $k < k^*$ tenemos que $x \sim_k y$, y también $x \succ_{k^*} y$ o bien,*

2. *$x \sim_k y$ para todo $k$.*

Ejercicio: Verificar que $\succsim_L$ es un relación de preferencias (ayuda: debe cumplir con las propiedades de completitud y transitividad).

**Ejemplo:**
Sea $X$ el cuadrado unitario, i.e., $X = [0,1] \times [0,1]$. Sea $x \succsim_k y$ si $x_k \geq y_k$.[2] El ordenamiento lexicográfico $\succsim_L$ inducido a partir de $\succsim_1$ y $\succsim_2$ es: $(a_1, a_2) \succsim_L (b_1, b_2)$ si $a_1 > b_1$ o si $a_1 = b_1$ y $a_2 \geq b_2$. Por lo tanto en este ejemplo el componente de la izquierda es el criterio primario mientras que el componente de la derecha es el criterio secundario.

Vamos a mostrar que las preferencias $\succsim_L$ NO tienen una representación en términos de utilidad. La ausencia de una representación en términos de utilidad excluye a las preferencias lexicográficas del alcance de los modelos económicos estándar a pesar del hecho de que las mismas son obtenidas a partir de un procedimiento sencillo y comúnmente utilizado.

**Afirmación**
La relación de preferencias lexicográficas $\succsim_L$ sobre el conjunto $[0,1] \times [0,1]$, inducida a partir de las relaciones $x \succsim_k y$ si $x_k \geq y_k$ $(k = 1, 2)$, no tiene una representación en términos de utilidad.

**Demostración**
Asumamos por contradicción que la función $u : X \to I\!R$ representa a $\succsim_L$. Para cualquier $a \in [0,1]$, $(a, 1) \succ_L (a, 0)$, por lo tanto tenemos que $u(a, 1) > u(a, 0)$. Sea $q(a)$ un número racional en el intervalo no vacío $I_a = (u(a, 0), u(a, 1))$. La función $q$ está definida desde el intervalo $[0,1]$ hacia el conjunto de números racionales (i.e., $q : [0,1] \to \mathbb{Q}$).[3] La función $q$ es uno a uno dado que si $b > a$ entonces $(b, 0) \succ_L (a, 1)$ y por lo tanto $u(b, 0) > u(a, 1)$.[4] Se sigue que los intervalos $I_a$ e $I_b$ son disjuntos y por lo tanto $q(a) \neq q(b)$. Pero la cardinalidad de los números racionales es menor que la de los reales (potencia del continuo), esto es una contradicción.

Alternativamente podemos utilizar la siguiente demostración.

Asumamos por contradicción que la función $u : X \to I\!R$ representa a $\succsim_L$. Para cualquier $a \in [0,1]$ podemos escoger un número racional $q(a)$ tal que $u(a, 1) > q(a) >$

[2] $x = (x_1, x_2)^T$, $y = (y_1, y_2)^T$

[3] Se llama número racional a todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros o, más precisamente, un entero y un natural positivo, es decir, una fracción común a/b con numerador a y denominador b distinto de cero.

[4] Recordar que las funciones crecientes son siempre uno a uno o inyectivas.

$u(a,0)$. Notemos que por el carácter lexicográfico de las preferencias, $b > a$ implica que $q(b) > q(a)$ (dado que $q(b) > u(b,0) > u(a,1) > q(a)$). Por lo tanto $q$ es una función uno a uno o inyectiva que toma valores en el conjunto de números reales (que es no numerable) hacia el conjunto de números racionales (que es numerable). Esto es una imposibilidad matemática (ya que dijimos que $q$ era inyectiva). Por lo tanto concluimos que no existe una función de utilidad que represente estas preferencias.

El supuesto que necesitamos para asegurar la existencia de una función de utilidad que represente las preferencias es que la relación de preferencias sea continua.

## 2.4. Continuidad de las preferencias

En economía, frecuentemente asumimos que el conjunto $X$ es un subconjunto infinito del espacio Euclídeo. A continuación vamos a postular la condición que garantiza la existencia de una representación en términos de utilidad en este caso. La intuición básica detrás de la noción de una relación de preferencias continua es que si $a$ es preferido a $b$, entonces pequeñas desviaciones desde $a$ hacia $b$ no revertirán el ordenamiento.

En lo que sigue nos referiremos a una *bola* alrededor de $a$ (con centro $a$) en $X$ con radio $r > 0$, denotada por $B(a,r)$, como el conjunto de todos los puntos en $X$ que distan de $a$ en menos que $r$. Hay dos tipos de bolas, abiertas y cerradas.

**Definición 5** *Una relación de preferencias $\succsim$ sobre $X$ es* ***continua*** *si siempre que $a \succ b$ (es decir que no se cumple que $b \succsim a$), existen bolas (entornos en la topología relevante) $B_a$ y $B_b$ centradas en $a$ y $b$, respectivamente, tal que para todo $x \in B_a$ y para todo $y \in B_b$, $x \succ y$ (ver figura a continuación).*

**Definición 6** *Una relación de preferencias $\succsim$ sobre $X$ es* ***continua*** *si el gráfico de $\succsim$ (i.e., el conjunto $\{(x,y)|x \succsim y\} \subseteq X \times X$) es un conjunto cerrado; esto es, si $(a_n, b_n)$ es una sucesión de pares de elementos en $X$ que satisface $a_n \succsim b_n$ para todo $n$ y $a_n \to a$ y $b_n \to b$, entonces $a \succsim b$ (ver figura a continuación).*

A continuación postulamos un resultado que estable que ambas definiciones son equivalentes.

**Afirmación**

La relación de preferencias $\succsim$ sobre el conjunto $X$, satisface la definición 5 si y solo si satisface la definición 6.

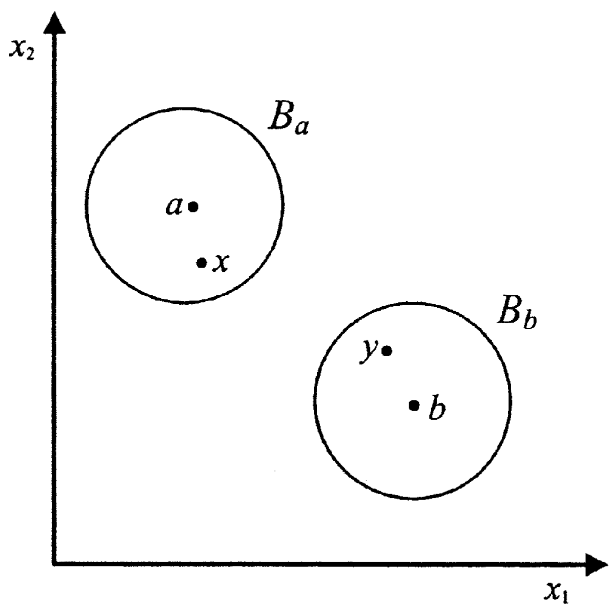
**Demostración**

La prueba se divide en dos partes (porque es un $\iff$).

1. Asumamos que $\succsim$ sobre $X$ es continua según la definición 5, debemos mostrar que esto implica que también es continua según 6. Sea $(a_n, b_n)$ una sucesión de pares que satisface $a_n \succsim b_n$ para todo $n$ y $a_n \to a$ y $b_n \to b$.[5] Si no es cierto que

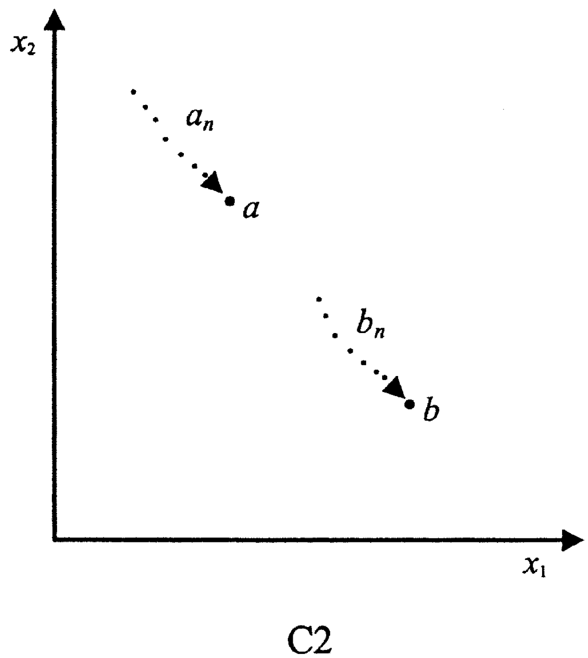
[5] Para mostrar que se cumple 6 hay que mostrar que $a \succsim b$.

Figura 2.1: Continuidad de las preferencias: definición 1




**C1**

Figura 2.2: Continuidad de las preferencias: definición 2




$a \succsim b$ (esto es, $b \succ a$), entonces existen dos bolas, $B_a$ y $B_b$ centradas en $a$ y $b$, respectivamente, tal que para todo $y \in B_b$ y para todo $x \in B_a$, $y \succ x$. Existe un $N$, lo suficientemente grande tal que para todo $n > N$, tanto $b_n \in B_b$ y $a_n \in B_a$. Por lo tanto, para todo $n > N$, tenemos que $b_n \succ a_n$, lo que es una contradicción.

2. Asumamos que $\succsim$ sobre $X$ es continua según la definición 6. Sea $a \succ b$. Recordemos que $B(x, r)$ es el conjunto de todos los elementos en $X$ que distan de $x$ en menos que una distancia $r$. Asumamos por contradicción que para todo $n$ existe $a_n \in B(a, 1/n)$ y $b_n \in B(b, 1/n)$ tal que $b_n \succsim a_n$. La sucesión $(b_n, a_n)$ converge hacia $(b, a)$; por la segunda definición dada $(b, a)$ se encuentra dentro del gráfico de $\succsim$ lo que significa que $b \succsim a$, lo que es una contradicción.

**Algunas observaciones**

i. Si $\succsim$ sobre $X$ es representada por una función de utilidad $U$ *continua*, entonces $\succsim$ es continua. Para ver esto, notar que si $a \succ b$ entonces $U(a) > U(b)$. Sea $\epsilon = (U(a) - U(b))/2$. Por continuidad de $U$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x$ que se encuentra a una distancia de $a$ menor a $\delta$ se cumple que $U(x) > U(a) - \epsilon$, y para todo $y$ que se encuentra a una distancia de $b$ menor a $\delta$, se cumple que $U(y) < U(b) + \epsilon$. Por lo tanto, para $x$ e $y$ que se encuentran dentro de las bolas con radio $\delta$ alrededor de $a$ y $b$, respectivamente, se cumple que $x \succ y$.

ii. Las preferencias lexicográficas de nuestro ejemplo que utilizamos para demostrar la no existencia de una representación en términos de utilidad no son continuas. Esto se debe a que $(1,1) \succ (1,0)$, pero en cualquier bola alrededor de (1,1) hay puntos que son inferiores a (1,0).

iii. Notar que la segunda definición de continuidad dada puede aplicarse a cualquier relación binaria sobre un espacio topológico, es decir que no es exclusiva al caso de relación de preferencias.[6] Por ejemplo, la relación $=$ sobre los números reales ($I\!R$) es continua mientras que la relación $\neq$ no lo es.[7]

## 2.5. El Teorema de Debreu

El teorema de Debreu que postula que las preferencias continuas tienen un representación en términos de utilidad también continua, es uno de los resultados clásicos más importantes en teoría económica. Para una revisión completa sobre este teorema ver Debreu 1954, 1960. En este curso solo vamos a probar que la continuidad garantiza la existencia de una representación en términos de utilidad.

**Lema**

Si $\succsim$ es una relación de preferencias continua sobre el conjunto convexo $X \subseteq I\!R^n$, y si $x \succ y$, entonces existe $z \in X$ tal que $x \succ z \succ y$.

Antes de pasar a la demostración recordemos lo que es un conjunto convexo.

$$C \text{ es convexo } \iff \text{ para todo } (a,b) \in C \text{ y para todo } t \in [0,1],\ (1-t)a + tb \in C.$$

**Demostración**

La prueba es por contradicción. Asumamos por el contrario. Sea $I$ el intervalo que conecta $x$ e $y$. Dada la convexidad de $X$, $I \subseteq X$. Construyamos inductivamente dos sucesiones de puntos en $I$, $x_t$ e $y_t$, de la siguiente manera. Primero definamos $x_0 = x$ e $y_0 = y$. Asumamos que los dos puntos $x_t$ e $y_t$ están definidos, pertenecen a $I$ y satisfacen $x_t \succsim x$ e $y \succsim y_t$. Consideremos el punto medio entre $x_t$ e $y_t$ y denotémoslo $m$. Según nuestros supuestos, puede ser que tanto $m \succsim x$ o que $y \succsim m$. En el primer caso definamos $x_{t+1} = m$ e $y_{t+1} = y_t$ y en el segundo caso definamos $x_{t+1} = x_t$ e $y_{t+1} = m$. Las sucesiones $x_t$ e $y_t$ son convergentes, y es más deben converger al mismo punto $z$ dado que la distancia entre $x_t$ e $y_t$ converge a cero. Por la continuidad de $\succsim$ tenemos que $z \succsim x$ y que $y \succsim z$ y por lo tanto por transitividad, $y \succsim x$, lo que contradice el supuesto que $x \succ y$.

**Comentario sobre la Demostración**

[6] Un espacio topológico es una estructura matemática que permite la definición formal de conceptos como convergencia, conectividad, continuidad, entorno, usando subconjuntos de un conjunto dado. La rama de las matemáticas que estudia los espacios topológicos se llama topología.

[7] Recordar que a $\neq$ b significa que a no es igual a b. Tal expresión no indica si uno es mayor que el otro, o siquiera si son comparables. También el conjunto unitario no existe bajo esta relación.

- Podríamos haber desarrollado otra prueba para el caso más general en el cual el supuesto sobre la convexidad de $X$ es reemplazado por el supuesto menos restrictivo (i.e. más débil) de que $X$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$.[8]

Recordar que un conjunto $Y \subseteq X$ es *denso* en $X$ si en cada subconjunto abierto de $X$ existe un elemento en $Y$. Por ejemplo, el conjunto

$$Y = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | x_k \,\text{es un número racional para k=1,...,n} \right\}$$

es un conjunto numerable y denso en $\mathbb{R}^n$.

**Proposición**

Asumamos que $X$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Si $\succsim$ es una relación de preferencia continua sobre $X$, entonces $\succsim$ tiene un representación (continua) en términos de utilidad.

**Demostración**

Denotemos por $Y$ a un conjunto denso numerable en $X$ (dicho conjunto existe). Por una afirmación anterior (ver afirmación Afirmación 2) sabemos que existe una función $v : Y \to (-1, 1)$, que es una representación en términos de utilidad de la relación de preferencias $\succsim$ restringida a $Y$. Para cada $x \in X$, definamos $U(x) = \{\sup v(z) | z \in Y, x \succ z\}$. Definamos $U(x) = -1$ si no existe $z \in Y$ tal que $x \succ z$, lo que significa que $x$ es el elemento mínimo en $X$. (Notar que podría ser que $U(x) < v(z)$ para algún $z \in Y$.) Veamos los dos casos relevantes.

1. Si $x \sim y$, entonces $x \succ z$ si y solo si $y \succ z$. Por lo tanto, los conjuntos sobre los cuales se toma el supremo son los mismos y $U(x) = U(y)$.

2. Si $x \succ y$, entonces por el lema anterior, existe $z \in X$ tal que $x \succ z \succ y$. Por la continuidad de las preferencias $\succsim$ existe una bola centrada en $z$ tal que todos los elementos en dicha bola son inferiores a $x$ y superiores a $y$. Dado que $Y$ es denso, existe $z_1 \in Y$ tal que $x \succ z_1 \succ y$. Similarmente, existe $z_2 \in Y$ tal que $z_1 \succ z_2 \succ y$. Finalmente tenemos que:

$$\begin{aligned} U(x) &\geq v(z_1) \text{ (por la definición de } U \text{ y por el hecho de que } x \succ z_1), \\ v(z_1) &> v(z_2) \text{ (dado que } v \text{ representa a } \succsim \text{ sobre } Y \text{ y que } z_1 \succ z_2), \text{ y} \\ v(z_2) &\geq U(y) \text{ (por la definición de } U \text{ y por el hecho de que } z_2 \succ y). \end{aligned}$$

**Referencias**


- [Rubinstein, 2012]: Capítulo 2.

- [Mas-Colell et al., 1995]: Capítulo 3, C


---

[8] Un conjunto conexo es un subconjunto $C \subseteq X$ de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ , (donde $\mathcal{T}$ , es la colección de conjuntos abiertos del espacio topológico) que no puede ser descripto como unión disjunta de dos conjuntos abiertos de la topología, en otras palabras un conjunto conexo no puede ser cubierto por dos conjuntos abiertos no vacíos disjuntos.

- [Fishburn, 1970].
- El ejemplo de preferencias lexicográficas está en [Debreu, 1959] (en particular hay un ejemplo online en `http://cowles.econ.yale.edu/P/cp/p00b/p0097.pdf`).
- [Kreps, 1990]: pags. 30-32.
- [Debreu, 1959] puede obtenerse online en: `http://cowles.econ.yale.edu/P/cm/m17/`

# Capítulo 3

# Elección

## 3.1. Funciones de elección

Hasta ahora hemos evitado cualquier referencia al comportamiento de los agentes. Hemos presentado a las preferencias como un resumen de la actitud mental del tomador de decisiones con respecto a un conjunto de alternativas. Pero la economía trata sobre las acciones de los individuos, y por lo tanto ahora vamos a modelar el "comportamiento de los agentes" (en realidad vamos a hablar *del agente representativo*). Cuando hablamos de una descripción del comportamiento del agente nos referimos no solamente a sus elecciones actuales, las que hace cuando se enfrenta a un cierto problema dado, sino también a una completa descripción de su comportamiento en todos los escenarios que imaginamos él se puede enfrentar en un cierto contexto.

Vamos a definir el problema de elección de la siguiente manera.

**Definición 7** *Considere un gran conjunto $X$ de alternativas posibles. Definiremos como un* ***problema de elección*** *a un subconjunto no vacío de $X$ y llamaremos elección desde $A \subset X$ a la especificación de alguno de los elementos de $A$.*

Modelar un escenario de elección como un conjunto de alternativas implica hacer supuestos sobre racionalidad según los cuales la elección del agente no depende de la manera en que las alternativas son presentadas. En otras palabras, un agente racional considera solamente el conjunto de alternativas que tiene disponible. En algunos contextos, no todos los problemas de elección son relevantes. Por lo tanto permitiremos que el comportamiento del agente esté definido solamente sobre un conjunto $D$ de subconjuntos de $X$. Nos referiremos al par $(X, D)$ como el contexto.

**Ejemplo:**
Imaginemos que estamos interesados en el comportamiento de un estudiante con respecto a su selección de un conjunto de universidades a las cuales ha sido admitido. Sea $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ el conjunto de todas las universidades que el estudiante conoce. Un problema de elección $A$ se interpreta como el conjunto de universidades a las cuales ha sido admitido (notar que $A \subset X$, ya que el alumno puede haber sido admitido a una menor cantidad de universidades de las conocidas por él). Si el hecho de que el estudiante

fuese admitido a un subconjunto de universidades no implica que no ha sido admitido a otras universidades, entonces $D$ contiene $2^N - 1$ subconjuntos no vacíos de $X$ (ejemplo, si $N = 3$, el alumno conoce (aplica a) solo 3 universidades y puede ser admitido en 1, 2, o las 3 universidades, entonces $D$ contiene $2^3 - 1 = 7$ subconjuntos no vacíos, todas las combinaciones posibles $\{x_1, x_2, x_3, (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)\}$). Pero si por ejemplo, las universidades están listadas de acuerdo a la dificultad en ser admitido (siendo $x_1$ la universidad en la que es más difícil entrar) y si el hecho de que el estudiante ha sido admitido a la universidad $x_k$ significa que es admitido a todas los otras universidades "menos" prestigiosas (las que están más abajo en el listado) es decir a todas las $x_\ell$ con $\ell > k$, entonces $D$ está compuesto por $N$ conjuntos $A_1, \ldots, A_N$, donde $A_k = \{x_k, \ldots, x_N\}$.

Pensamos en el comportamiento de un agente como la respuesta hipotética a un cuestionario que contiene preguntas del siguiente tipo, una para cada $A \in D$:

**Q(A)**: Asuma que ud. debe elegir a partir de un conjunto de alternativas $A$. ¿Qué alternativa elige?

Una respuesta permitida a este cuestionario requiere que el agente seleccione un único elemento de $A$ para cada pregunta $Q(A)$. Implicitamente asumimos que el agente no puede dar respuestas tal como "elijo tanto $a$ o $b$"; "la probabilidad de elegir $a \in A$ es $p(a)$"; "No sé" etc.

**Definición 8** *Formalmente, dado un contexto $(X, D)$ una* ***función de elección*** *$C$ asigna a cada conjunto $A \in D$ un único elemento de $A$ con la interpretación de que $C(A)$ es el elemento elegido del conjunto $A$*

La manera en que entendemos esta definición es que un agente que se comporta de acuerdo a la función $C$ elegirá $C(A)$ si él tiene que tomar una decisión del conjunto $A$. Esto no significa que nosotros podemos observar la función de elección (i.e. conocer la forma funcional). A lo sumo nosotros podemos observar algunas elecciones particulares hechas por el agente tomador de decisiones en algunas instancias. Por lo tanto, una función de elección es una descripción del comportamiento hipotético.

## 3.2. Funciones de elección racionales

En economía típicamente se asume que la elección es el resultado de una "deliberación racional". Es decir, el tomador de decisiones tiene en mente una relación de preferencias $\succsim$ sobre el conjunto $X$ y, dado un problema de decisión $A \in D$, él elige un elemento de $A$ que es óptimo según $\succsim$. Damos la siguiente definición.

**Definición 9** *La* ***función inducida de elección*** *$C_\succsim$, asumiendo que está bien definida, es la función que asigna a cada conjunto no vacío $A \in D$ el mejor elemento de $A$ según $\succsim$.*

Es importante destacar que la relación de preferencias es fija, esto es, es independiente del conjunto de elección considerado.

## 3.3. Argumento de la succión financiera (*Dutch Book Argument*)

Algunas de las justificaciones al supuesto de que la elección está determinada por la "deliberación racional" son normativas, esto es, reflejan una percepción de que la gente debería ser racional y que, si no lo es, debería cambiar su razonamiento a uno de tipo racional. Una clase interesante de argumentos que apoya este enfoque es conocido en la literatura como el "Argumento de la succión financiera" (*Dutch Book Argument*). Este argumento afirma que un agente económico que se comporta de acuerdo a una función de elección que no está inducida a partir de una maximización de preferencias no puede llevarse a cabo.[1]

A continuación daremos dos ejemplos para ilustrar este argumento. El primero se trata de un mono en un bosque o una selva que tiene tres árboles, $a$, $b$ y $c$. El mono tiene que elegir un árbol para dormir. Asumamos que el mono solamente puede valorar dos alternativas en forma conjunta (al mismo tiempo) y que su función de elección es $C(\{a,b\}) = b, C(\{b,c\}) = c, C(\{a,c\}) = a$. Obviamente, su función de elección no puede derivarse a partir de una relación de preferencias sobre el conjunto de árboles. Asumamos que toda vez que el mono esté sobre el árbol $x$ viene a su cabeza el deseo de saltar ocasionalmente a uno de los otros árboles, es decir, hace una elección desde el conjunto $\{x,y\}$ donde $y$ es uno de los otros dos árboles. Este comportamiento induce al mono a saltar de manera perpetua de un árbol a otro, lo que no constituye un modo deseable de comportamiento en la jungla.

Otro argumento, más apropiado para seres humanos, es el llamado "money pumb" (bomba de dinero). Asumamos que un tomador de decisiones se comporta como el mono con respecto a tres alternativas $a$, $b$ y $c$. Asumamos también que, para todo $x$ e $y$, la elección $C(\{x,y\}) = y$ es lo suficientemente fuerte de manera que siempre que el agente está por elegir la alternativa $x$ y alguien le da la oportunidad de elegir también la alternativa $y$, él está dispuesto a pagar un centavo por la oportunidad de hacerlo. Ahora, imaginemos a un manipulador que le presenta al agente el problema de elección $\{a,b,c\}$. Cada vez que el tomador de decisiones está por elegir la opción $a$, el manipulador le permite revisar su opción hacia $b$ por un centavo. Similarmente, cada vez que él está por elegir $b$ o $c$, el manipulador le vende por un centavo la oportunidad de elegir $c$ o $a$, respectivamente. El tomador de decisiones terminará rotando cíclicamente a través de las intenciones de elegir $a$, $b$ y $c$ hasta que sus bolsillos queden vacíos o hasta que él

[1] El argumento de la succión financiera (en inglés "dutch book" o "lock"; en francés "argument du pari hollandais") es un conjunto de apuestas que garantiza una ganancia, independientemente del resultado del juego. Está asociado con la probabilidad de apuestas que no son coherentes. En economía, un dutch book suele referirse a una secuencia de transacciones que, en caso de realizarse, dejan a una parte peor y a otra mejor. Los presupuestos clásicos de la "teoría del consumo" excluyen la posibilidad de que alguien sea víctima del argumento de la succión financiera.

aprenda la lección y cambie de comportamiento.

Los argumentos mencionados están abiertos a la crítica. En particular, la eliminación de patrones de comportamiento que son inconsistentes con la racionalidad requieren un ambiente en el cual el agente económico está de hecho confrontado con la secuencia de problemas de elección mostrada más arriba . Presentamos estos argumentos aquí como ideas interesantes y no necesariamente como argumentos convincentes para la racionalidad.

## 3.4. Racionalización

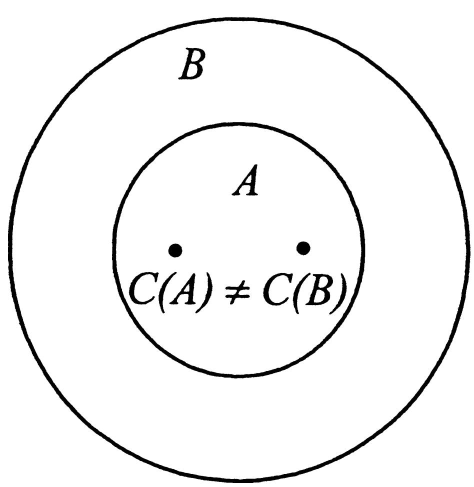
Los economistas han sido frecuentemente criticados por hacer el supuesto de que el tomador de decisiones maximiza una relación de preferencias. La respuesta más común a esta crítica es que realmente no necesitamos este supuesto. Todo lo que necesitamos asumir es que el comportamiento del tomador de decisiones puede ser descripto *como si* él estuviera maximizando alguna relación de preferencias.

Expongamos esta "defensa de los economistas" de manera más precisa. Diremos que la función de elección $C$ *puede ser racionalizada* si existe una relación de preferencias $\succsim$ sobre $X$ de manera que $C = C_{\succsim}$ (léase, $C(A) = C_{\succsim}(A)$ para cualquier $A$ en el dominio de $C$).

Identificaremos ahora una condición bajo la cual una función de elección puede de hecho ser presentada como si fuera derivada de alguna relación de preferencia (i.e. puede ser racionalizada).

**Condición $\alpha$:** Decimos que $C$ satisface la condición $\alpha$ si para cualquier dos problemas $A, B \in D$, si $A \subset B$ y $C(B) \in A$ entonces $C(A) = C(B)$. A continuación mostramos un caso en donde se viola esta condición.

Figura 3.1: Violación de la condición $\alpha$



Notemos que si $\succsim$ es una relación de preferencias sobre $X$, entonces $C_{\succsim}$ (definida sobre un conjunto de subconjuntos de $X$ que tiene un elemento más preferido singular) satisface la condición $\alpha$.

Como un ejemplo de un proceso de elección que no satisface la condición $\alpha$, consideremos el *procedimiento del segundo mejor*: el tomador de decisiones tiene en mente un ordenamiento $\succsim$ sobre $X$ y para cada conjunto dado del problema de elección $A$ él elige un elemento de $A$ que es máximo según $\succsim$ entre las alternativas no-óptimas (i.e. elige el segundo mejor). Si $A$ contiene todos los elementos en $B$ excepto por el máximo según $\succsim$, entonces $C(B) \in A \subset B$ pero $C(A) \neq C(B)$.

Mostraremos a continuación que la condición $\alpha$ es una condición suficiente para que una función de elección sea formulada *como si* el tomador de decisiones estuviera maximizando alguna relación de preferencias.

**Proposición** Asuma que $C$ es una función de elección cuyo dominio contiene al menos todos los subconjuntos de $X$ de tamaño 2 o 3. Si $C$ satisface la condición $\alpha$, entonces existe una relación de preferencias $\succsim$ sobre $X$ tal que $C = C_{\succsim}$.

**Demostración**
Defina $\succsim$ como $x \succsim y$ si $x = C(\{x, y\})$. Verifiquemos primero que la relación $\succsim$ es una relación de preferencia.

1. Completitud: Sigue del hecho que $C(\{x, y\})$ está siempre bien definida.

2. Transitividad:

   Si $x \succsim y$ e $y \succsim z$, entonces $C(\{x, y\}) = x$ y $C(\{y, z\}) = y$.

   Si $C(\{x, z\}) \neq x$ entonces $C(\{x, z\}) = z$.

   Por la condición $\alpha$ y por tener que $C(\{x, z\}) = z$, $C(\{x, y, z\}) \neq x$.

   Por la condición $\alpha$ y por tener que $C(\{x, y\}) = x$, $C(\{x, y, z\}) \neq y$.

   Finalmente, por la condición $\alpha$ y por tener que $C(\{y, z\}) = y$, $C(\{x, y, z\}) \neq z$.

   Esto es una contradicción al hecho que $C(\{x, y, z\}) \in \{x, y, z\}$.

Todavía nos queda demostrar que $C(B) = C_{\succsim}(B)$. Asuma que $C(B) = x$ y que $C_{\succsim}(B) \neq x$. Esto es, existe un $y \in B$ de manera que $y \succ x$. Por la definición de $\succsim$, esto significa que $C(\{x, y\}) = y$, lo que contradice la condición $\alpha$.

## 3.5. ¿Qué es una alternativa?

Algunos de los casos en donde se viola la racionalidad pueden atribuirse a la especificación incorrecta del espacio de alternativas. Consideremos el siguiente ejemplo tomado de [Luce y Raiffa, 1957]: Un comensal en un restaurante elige *pollo* del menú $\{filete, pollo\}$, pero elige *filete* del menú $\{filete, pollo, rana\}$. A primera vista parece que este consumidor no es racional (dado que sus elecciones entran en conflicto con la condición $\alpha$). Asumamos que la motivación para tal elección es que la existencia de *rana* es un indicativo de la calidad del chef. Si el plato "*rana*" está en el menú, el cocinero debe ser realmente un experto, y el tomador de decisiones está feliz de ordenar *filete*, lo que requiere pericia. Si por el contrario en el menú no hay *rana*, entonces el agente no quiere tomar el riesgo de elegir *filete*.

La racionalidad puede "restituirse" si hacemos la distinción entre "*filete* servido en un restaurante que también tiene *rana* en el menú (y el cocinero por lo tanto debe ser un verdadero chef)" y el "*filete* en un restaurante que no sirve *rana* (y el cocinero es probablemente un novato)". Tal distinción tiene sentido dado que el *filete* no es lo mismo en ambos conjuntos de opciones.

Notemos que si definimos una alternativa como $(a, A)$, donde $a$ es una descripción física y $A$ es el problema de elección (conjunto de alternativas), cualquier función de elección $C$ puede ser racionalizada por una relación de preferencias que satisface $(C(A), A) \succsim (a, A)$ para todo $a \in A$.

La lección que nos deja esta discusión es que se debe tener cuidado al especificar el término "alternativa". Una alternativa $a$ debe tener el mismo significado para cada $A$ que contenga a $a$.

## 3.6. Funciones de elección como equilibrios internos

La definición de función de elección que hemos estado utilizando requiere que un único elemento sea asignado a cada problema de elección. Si el tomador de decisiones sigue el procedimiento del hombre-racional usando una relación de preferencia con indiferencias, la función de elección inducida previamente denotada $C_{\succsim}(A)$ puede estar indefinida porque para algunos problemas de elección habría más de un elemento óptimo. Estas es una de las razones por las que en algunos casos utilizamos el siguiente concepto alternativo para modelar comportamiento.

**Definición 10** *Una **correspondencia de elección** $C$ asigna a cada subconjunto no vacío $A \subseteq X$ un <u>subconjunto</u> no vacío de $A$, esto es, $\emptyset \neq C(A) \subset A$.*

De acuerdo a nuestra interpretación de un problema de elección, un tomador de decisiones debe seleccionar un único elemento de cada conjunto de elección. Por lo tanto, $C(A)$ no puede interpretarse como la elección hecha por el individuo cuando tiene que tomar una decisión desde $A$. La interpretación revisada de $C(A)$ implica que es el *conjunto* de todos los elementos en $A$ que son satisfactorios en el sentido que si el individuo está por tomar una decisión y elige $a \in C(A)$, él no tiene deseos de moverse de allí. En otras palabras, una correspondencia de elección refleja un "equilibrio interno": Si el tomador de decisiones que enfrenta a $A$ considera una alternativa afuera de $C(A)$, el continuará buscando otra alternativa. Si sucede que él considera una alternativa dentro de $C(A)$, él la tomará.

Otra interpretación relacionada con $C(A)$ involucra verla como el conjunto de todos los elementos en $A$ que pueden ser elegidos bajo alguna de las varias circunstancias particulares posibles no incluidas en la descripción del conjunto $A$. Formalmente, sea

$(A, f)$ un conjunto de elección extendido donde $f$ es el marco que acompaña al conjunto $A$ (como la alternativa por defecto o el orden de las alternativas). Sea $c(A, f)$ la elección hecha por el tomador de decisiones a partir del conjunto de elección $A$ dado el marco $f$. La función de elección (extendida) $c$ induce una correspondencia de elección dada por $C(A) = \{x|x = c(A, f) \text{ para algún } f\}$.

Al igual que antes, también podemos definir en este marco la correspondencia de elección inducida. Dada un relación de preferencias $\succsim$ definimos a la correspondencia de elección inducida (asumiendo que nunca es un conjunto vacío) como $C_{\succsim}(A) = \{x \in A|x \succsim y \text{ para todo } y \in A\}$.

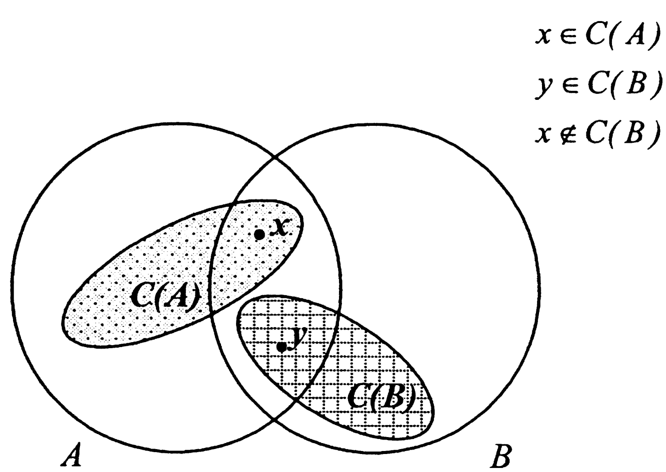
Cuando $x, y \in A$ y $x \in C(A)$ decimos que $x$ se revela como al menos tan buena como $y$ . Si, adicionalmente, $y \notin C(A)$ decimos que $x$ se revela como estrictamente mejor que $y$. La condición $\alpha$ es reemplazada ahora por la condición WA que requiere que si $x$ se revela como al menos tan buena como $y$ entonces $y$ no se revela como estrictamente mejor que $x$.

## 3.7. El Axioma Débil de la Preferencia Revelada (WA)

**Definición 11** *Decimos que la función de elección $C$ satisface el WA si cada vez que $x, y \in A \cap B, x \in C(A)$ e $y \in C(B)$, también es cierto que $x \in C(B)$.*

En palabras, el axioma débil dice que si $x$ es alguna vez elegido cuando $y$ está disponible, entonces no puede existir un conjunto de alternativas que contenga ambas alternativas para el cual $y$ sea elegido y $x$ no lo sea. Veamos gráficamente una violación del WA.

Figura 3.2: Violación del axioma débil (WA)




Notar que si $C(A)$ contiene todos los elementos que son máximos de acuerdo a alguna relación de preferencia, entonces $C$ satisface el WA. También podemos verificar (hacer!!) que la condición $\alpha$ y el WA son equivalentes para cualquier función de elección con un dominio que satisfaga que si $A$ y $B$ están incluidos en el dominio, entonces también lo está su intersección. A continuación vamos a demostrar una proposición que establece la conexión entre el WA y la relación de preferencias $\succsim$ (recordar que ya establecimos una proposición con la conexión entre la condición $\alpha$ y la relación de preferencias $\succsim$).

**Proposición** Asuma que $C$ es una correspondencia de elección cuyo dominio contiene al menos todos los subconjuntos de $X$ de tamaño 2 o 3. Asuma que $C$ satisface el WA. Entonces existe una relación de preferencias $\succsim$ sobre $X$ tal que $C = C_{\succsim}$.

**Demostración**
Defina $x \succsim y$ si $x \in C(\{x, y\})$. Mostraremos primero que la relación $\succsim$ es una relación de preferencia.

1. Completitud: Sigue del hecho que $C(\{x, y\}) \neq \emptyset$ (i.e. está siempre bien definida).

2. Transitividad:

   Si $x \succsim y$ e $y \succsim z$, entonces $x \in C(\{x, y\})$ e $y \in C(\{y, z\})$.

   Por lo tanto, por el WA si $y \in C(\{x, y, z\})$ entonces $x \in C(\{x, y, z\})$ y,

   si $z \in C(\{x, y, z\})$ entonces $y \in C(\{x, y, z\})$.

   Luego, en cualquier caso, $x \in C(\{x, y, z\})$.

   Por el WA $x \in C(\{x, z\})$ y por lo tanto $x \succsim z$.

Queda demostrar que $C(B) = C_{\succsim}(B)$ (notar que es una igualdad, ambas direcciones).

Asuma que $x \in C(B)$ y que $x \notin C_{\succsim}(B)$ (prueba por contradicción). Esto es, existe $y \in B$ de manera que no es verdad que $x \succsim y$, o en otras palabras, $C(\{x, y\}) = \{y\}$, lo que contradice el WA.

Asuma que $x \in C_{\succsim}(B)$ y que $x \notin C(B)$. Sea $y \in C(B)$. Por el WA $x \notin C(\{x, y\})$, luego $C(\{x, y\}) = \{y\}$. Por lo tanto, $y \succ x$, lo que contradice que $x \in C_{\succsim}(B)$.

## 3.8. El procedimiento "Satisficing"

El hecho de que podamos presentar cualquier función de elección que satisfaga la condición $\alpha$ (o el WA) como un resultado de la optimización de alguna relación de preferencias aporta evidencia en favor de la visión que sostiene que el alcance de los modelos microeconómicos es más amplio que simplemente plantear modelos en los cuales los agentes llevan a cabo optimizaciones explícitas. No obstante surge la siguiente pregunta, ¿hemos en realidad ampliado el alcance de los modelos económicos?

Consideremos el siguiente “esquema de decisión” llamado *satisficing* por Herbert Simon.[2] Sea $v : X \to I\!R$ una evaluación de los elementos en $X$, y sea $v^* \in I\!R$ un umbral de satisfacción. Sea $O$ un ordenamiento de las alternativas en $X$. Dado el conjunto $A$, el tomador de decisiones acomoda los elementos de este conjunto en una lista $L(A, O)$ de acuerdo al ordenamiento $O$. Luego él elige el primer elemento en $L(A, O)$ que tiene un valor-$v$ al menos tan grande como $v^*$. Si no existe tal elemento en $A$, el tomador de decisiones elige el último elemento en la lista $L(A, O)$.

Mostremos que la función de elección inducida por este procedimiento satisface la condición $\alpha$. Asumamos que $a$ es elegido desde el conjunto $B$ y que este elemento también pertenece a $A \subset B$. La lista $L(A, O)$ puede obtenerse a partir de $L(B, O)$ eliminando todos los elementos en $B - A$. Si $v(a) \geq v^*$ entonces $a$ es el primer elemento satisfactorio en $L(B, O)$ , y también es el primer elemento satisfactorio en $L(A, O)$. Luego, $a$ se elige a desde $A$. Si todos los elementos de $B$ son no satisfactorios, entonces $a$ debe ser el último elemento en $L(B, O)$. Dado que $A$ es un subconjunto de $B$, todos los elementos en $A$ son no satisfactorios y $a$ es el último elemento en $L(A, O)$. Luego $a$ es elegido desde $A$.

Notar, no obstante, que aún una “pequeña” variación en este esquema puede llevar a una variación del procedimiento de manera que no se siga cumpliendo la condición $\alpha$. Por ejemplo:

*Satisficing usando dos ordenamientos*: Sea $X$ la población de graduados universitarios que son potenciales candidatos a un trabajo. Dado un conjunto de candidatos, cuente cuántos son. Si el número es menor a 5, ordénelos alfabéticamente. Si el número es mayor a 5, ordénelos según su DNI. Cualquier ordenamiento que se use, elija al primer candidato cuyo promedio en la universidad esté por encima de 8,50. Si no existe tal persona, elija al último estudiante de la lista.

La condición $\alpha$ no se satisface. Podría ser que $a$ sea el primer candidato con un promedio satisfactorio en un listado largo de estudiantes ordenados según su DNI. Aún así, $a$ podría no ser el primer candidato con un promedio satisfactorio en una lista de solamente 3 candidatos que aparecen en el listado original ordenado alfabéticamente.

Para resumir, el procedimiento “satisficing”, a pesar de que está expuesto de una manera que parece no estar relacionada a la maximización de una relación de preferencia o de una función de utilidad, puede ser descripto como si el tomador de decisiones maximizara una relación de preferencia.

---

[2] “Satisficing” es una estrategia de decisión que implica buscar a través de las alternativas posibles hasta que un umbral aceptable es alcanzado. Esto contrasta con el procedimiento de decisiones óptimas, un enfoque que específicamente intenta encontrar la mejor alternativa posible. El término ”satisficing” es un mezcla de “satisfy” (satisfacer) y “suffice” (suficiente) que fue introducido por Herbert A. Simon en 1956. En el marco de la teoría de decisión, satisficing explica la tendencia a seleccionar la primer opción que cubre una necesidad dada o a seleccionar la opción que parece abordar la mayoría de las necesidades más que a seleccionar la alternativa óptima.

## 3.9. Motivos psicológicos no incluidos en este marco

El ataque moderno al enfoque estándar para modelar agentes económicos viene de la psicología, notablemente a partir de los trabajos de Amos Tversky y Daniel Kahneman. Estos investigadores nos han provistos con maravillosos ejemplos que demuestran no solamente que la racionalidad es frecuentemente un supuesto que se viola, sino que hay razones sistemáticas a dicha violación que se encuentran dentro de los procedimientos de decisión que usamos los economistas. Veremos ahora algunos ejemplos.

### 3.9.1. La manera de hacer la pregunta (*framing*)

El siguiente experimento (realizado por Taversky y Kahneman 1986) demuestra que la manera en que las alternativas son enmarcadas puede afectar la elección de los tomadores de decisiones. A los sujetos se les pidió que se imaginen que estaban frente al siguiente problema de elección:

Debido a un brote de una enfermedad se esperan 600 muertes en los Estados Unidos. Existen dos programas mutuamente excluyentes de los que se esperan los siguientes resultados:

**a.** 400 personas morirán.

**b.** Con probabilidad 1/3, ninguna persona morirá, y con probabilidad 2/3, 600 personas morirán.

En el experimento original, a otro grupo distinto de sujetos se le dio la misma información y se les pidió que eligieran entre las siguientes alternativas:

**c.** 200 personas serán salvadas.

**d.** Con probabilidad 1/3, todas las 600 personas se salvarán y con probabilidad 2/3, ninguna se salvará.

Mientras que el 78 % del primer grupo eligió la opción $b$, solo el 28 % del segundo grupo eligió $d$. Estos resultados son "problemáticos" dado que de manera razonable $a$ y $c$ son alternativas idénticas, como también lo son $b$ y $d$. Luego, la elección entre $\{a, b\}$ debería ser consistente con la elección entre $\{c, d\}$.

Ambas preguntas les fueron dadas en el orden mencionado más arriba a 1200 estudiantes de un curso de Teoría de Juegos. El resultado fue que 73 % eligió $b$ y 49 % eligió $d$. Parece plausible que varios estudiantes tuvieron en mente sus respuestas a la primer pregunta mientras respondían a la segunda y por lo tanto el nivel de inconsistencias fue menor. No obstante, una gran proporción de estudiantes dio una respuesta diferente a ambos problemas, lo que hace que estos hallazgos sean aún más problemáticos.

En suma, los resultados exponen la sensibilidad de las elecciones a la manera en que las alternativas son presentadas (*framing*). ¿Qué puede ser más básico en relación a decisiones racionales que simplemente elegir la misma alternativa cuando solamente la forma en la que se formula la pregunta es distinta?

### 3.9.2. Simplificación del problema de elección y el uso de similitudes

El siguiente experimento también fue conducido por Tversky y Kahneman. A un grupo de personas se lo enfrentó con el siguiente problema de elección:

Elija uno de los dos juegos de ruleta, $a$ o $b$. Su premio será el correspondiente al resultado de la ruleta elegida según se especifica en la siguiente tabla:

| | Color | Blanco | Rojo | Verde | Amarillo |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | Chance % | 90 | 6 | 1 | 3 |
| | Premio $ | 0 | 45 | 30 | -15 |

| | Color | Blanco | Rojo | Verde | Amarillo |
|---|---|---|---|---|---|
| (b) | Chance % | 90 | 7 | 1 | 2 |
| | Premio $ | 0 | 45 | -10 | -15 |

A un grupo diferente de sujetos se le presentó la misma información de contexto y se le pidió que elija entre:

| | Color | Blanco | Rojo | Verde | Azul | Amarillo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (c) | Chance % | 90 | 6 | 1 | 1 | 2 |
| | Premio $ | 0 | 45 | 30 | -15 | -15 |

| | Color | Blanco | Rojo | Verde | Azul | Amarillo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (d) | Chance % | 90 | 6 | 1 | 1 | 2 |
| | Premio $ | 0 | 45 | 45 | -10 | -15 |

En el experimento original, 58 % de los sujetos en el primer grupo eligieron $a$, mientras que nadie en el segundo grupo eligió $c$. Cuando se presentaron los dos problemas uno atrás del otro a 1350 estudiantes, 52 % eligió $a$ y 7 % eligió $c$. De manera interesante, la mediana del tiempo de respuesta entre los estudiantes que respondieron $a$ fue 53 segundos, mientras que la mediana del tiempo de respuesta de los estudiantes que respondieron $b$ fue de 90 segundos.

Estos resultados demuestran el uso de un procedimiento común que la gente practica cuando se la confronta con problemas complicados de elección. Frecuentemente traducimos problemas complicados en problemas más simples “cancelando” elementos similares. Mientras que la opción $d$ claramente domina a $c$, la comparación entre

$a$ y $b$ no es tan sencilla. Muchos sujetos "cancelan o eliminan" las probabilidades de Blanco, Amarillo y Rojo y se quedan con la comparación de los premios a Verde, un procedimiento que lleva a elegir $a$.

### 3.9.3. Elección basada en el razonamiento

Elegir alternativas algunas veces involucra encontrar razones para escoger una alternativa sobre las otras. Cuando la deliberación incluye el uso de razones fuertemente asociadas con el problema que se tiene a la mano ("razones internas") frecuentemente encontramos difícil reconciliar la elección con el paradigma del hombre racional.

Imaginemos, por ejemplo, a un estudiante europeo que elegiría *Princeton* si le fuera permitido escoger de $\{Princeton, LSE\}$ y que elegiría $LSE$ si él tuviera que elegir de $\{Princeton, Chicago, LSE\}$. Su explicación es que él prefiere una universidad americana siempre y cuando no tenga que elegir entre universidades americanas - una elección que a él le parece más difícil. Si tuviera que elegir entre $\{Princeton, Chicago, LSE\}$, encuentra tan difícil elegir entre *Princeton* y *Chicago* que por lo tanto él elige no cruzar el Atlántico. Su elección no satisface la condición $\alpha$, no porque él haga una especificación poco precisa de las alternativas (como era el caso del menú del restaurante que vimos antes), sino porque su razonamiento involucra un intento de evitar la dificultad asociada a tomar una decisión.

Otro ejemplo que podemos dar (por Federico Filippini, estudiante de economía) es el siguiente. Imaginemos que Alberto es un joven muy apuesto que está buscando una cita con una chica para ir a una fiesta. Alberto conoce a dos chicas que están locas por él, ambas se mueren de ganas por ir con él a la fiesta. Las chicas se llaman María y Laura. Entre las dos, Alberto prefiere a María. Ahora, imaginemos que María tiene una hermana que también está perdidamente enamorada de Alberto. Alberto debe ahora elegir entre las tres chicas, María, la hermana de María y Laura. Con esta tercera opción, apuesto que si Alberto es racional, él llevará a Laura a la fiesta.

Otro ejemplo es el que proponen Huber, Payne y Puto (1982):

Sea $a = (a_1, a_2)$ un paquete turístico de vacaciones que contiene $a_1$ días en París y $a_2$ días en Londres. Elija uno de los cuatro vectores siguientes: $a = (7, 4)$, $b = (4, 7)$, $c = (6, 3)$ y $d = (3, 6)$.

Todas las personas que participan del experimento están de acuerdo en el hecho que un día en París y un día en Londres son bienes deseados. A algunos sujetos se les pidió que eligieran entre las tres primeras opciones, $a, b$ y $c$; otros sujetos tenían que elegir entre $a$, $b$, y $d$. Los sujetos exhibieron una clara tendencia hacia la elección de $a$ entre $\{a, b, c\}$ y hacia la elección de $b$ entre $\{a, b, d\}$.

Para concluir, los tomadores de decisiones buscan razones para preferir una alternativa sobre otra. Típicamente, tomar decisiones utilizando "razones externas" (es decir aquellas que no se refieren a las propiedades del conjunto de elección) no causará violaciones al supuesto de racionalidad. Sin embargo, si se aplican "razones internas" como por ejemplo "yo prefiero la alternativa $a$ sobre la $b$ dado que $a$ claramente domina la otra alternativa $c$ mientras que $b$ no lo hace", podría causar conflictos con la condición $\alpha$.

### 3.9.4. Cuentas mentales

El siguiente ejemplo intuitivo es de Kahneman y Tversky (1984). A los miembros de un grupo de personas se les hizo la siguiente pregunta:

1. Imagine que ud. ha decidido ver una obra de teatro y ha pagado la entrada por un precio de USD 10. A medida que ud. entra al teatro, descubre que ha perdido su ticket. Las entradas no tienen asientos numerados y el ticket no puede ser recuperado. ¿Pagaría USD 10 por otra entrada?

   A miembros de otro grupo se le preguntó lo siguiente:

2. Imagine que ud. ha decidido ver una obra de teatro cuya entrada cuesta USD 10. A medida que ud. llega al teatro, descubre que ha perdido un billete de USD 10. ¿Pagaría aún USD 10 por la entrada?

Si al hombre racional solamente le interesa ver la obra de teatro y su riqueza, debería darse cuenta que no hay ninguna diferencia entre las consecuencias de responder "Si" a la pregunta 1 y responder "Si" a la pregunta 2 (en ambos casos el tendría una entrada y sería USD 20 más pobre). Similarmente, no hay diferencia entre las consecuencias por responder "No" a la pregunta 1 y responder "No" a la pregunta 2. Luego, el hombre racional debería dar la misma respuesta a las dos preguntas. Sin embargo, 46 % dijo que compraría otro ticket luego de haber perdido el primero mientras que 88 % dije que compraría un ticket luego de haber perdido el billete. Es probable que en este caso los individuos hayan realizo un cálculo donde comparaban el "precio mental" de una entrada con su valor subjetivo. Muchos de los que decidieron no comprar otro ticket luego de perder el primero, atribuyeron un precio de USD 20 a este ticket en lugar de un precio de USD 10. Este ejemplo demuestra que los tomadores de decisiones pueden realizar "cálculos mentales" que son inconsistentes con la racionalidad.

**Referencias**

- [Rubinstein, 2012]: Capítulo 3.
- [Mas-Colell et al., 1995]: Capítulo 1, C,D
- [Kreps, 1990]: pags. 24-30.

# Capítulo 4

# Las Preferencias de los Consumidores

## 4.1. El mundo de los consumidores

Hasta ahora hemos analizado el modelo económico básico de elección racional. En esta clase discutiremos un caso especial del paradigma del agente racional: *el consumidor*. Un consumidor es un agente económico que hace elecciones entre combinaciones disponibles de bienes. Por ejemplo, una mujer que va al mercado con dinero y trae de regreso una canasta de productos.

Como lo hemos venido haciendo, comenzaremos con una discusión sobre las preferencias de los consumidores y la utilidad, y luego de esto veremos el tema de la elección del consumidor. El primer paso es adaptar el tratamiento abstracto del conjunto $X$ que hemos venido realizando para desarrollar una estructura más detallada. Introducimos algunas precisiones.

Sea $X = I\!R^K$ con $I\!R^K = \{x = (x_1, \ldots, x_K) |\text{para todo } k, x_k \geq 0\}$. Llamaremos *canasta* a un elemento de $X$. Una canasta $x$ se interpreta como la combinación de $K$ productos donde $x_k$ el la cantidad del producto $k$.

Dada esta interpretación que utilizaremos para $X$, vamos a imponer algunas condiciones adicionales a las que ya hemos discutido en general sobre las preferencias. Las tres condiciones adicionales que veremos se refieren a la estructura del espacio $X$.

1. Monotonicidad: se refiere al ordenamiento de los ejes (para poder comparar canastas a través de la cantidad de cualquier producto en particular).

2. Continuidad: utiliza la estructura topológica (para poder hablar de cercanía).

3. Convexidad: utiliza la estructura algebraica (para poder hablar de la suma de dos canastas y de la multiplicación de una canasta por un escalar).

## 4.2. Monotonicidad

La monotonicidad es una propiedad que le da a los productos el significado de “bienes”. La condición que establece que más es mejor. En palabras, aumentar la cantidad de algún producto no puede ser dañino, y aumentar la cantidad de todos los productos es estrictamente deseable. Formalmente.

**Definición 12** *Monotonicidad*

*La relación $\succsim$ satisface **monotonicidad en la canasta** y si para todo $x \in X$,*

*si $x_k \geq y_k$ para todo $k$, entonces $x \succsim y$, y*

*si $x_k > y_k$ para todo $k$, entonces $x \succ y$.*

*La relación $\succsim$ satisface **monotonicidad** si es monótona para todo $y \in X$.*

En algunos casos, iremos más allá y asumiremos que el consumidor está estrictamente más feliz si tiene una cantidad adicional de cualquier producto. Por lo tanto definimos también el siguiente concepto.

**Definición 13** *Monotonicidad Fuerte*

*La relación $\succsim$ satisface **monotonicidad fuerte en la canasta** y si para todo $x \in X$,*

*si $x_k \geq y_k$ para todo $k$ y $x \neq y$, entonces $x \succ y$.*

*La relación $\succsim$ satisface **monotonicidad fuerte** si es monótona en sentido fuerte para todo $y \in X$.*

Lógicamente existe una conexión entre este concepto y la función de utilidad para los casos en que las preferencias pueden ser representadas a través de dicha función. Las preferencias que satisfacen monotonicidad (o monotonicidad fuerte) son representadas por funciones de utilidad monótonamente crecientes (o estrictamente crecientes).

**Ejemplos**

1. Las preferencias representadas por $\min\{x_1, x_2\}$ satisfacen monotonicidad pero no monotonicidad fuerte.

2. Las preferencias representadas por $x_1 + x_2$ satisfacen monotonicidad fuerte.

3. Denotemos por $d(x, y) = \sqrt{\sum (x_k - y_k)^2}$, a la función de distancia estándar sobre el espacio Euclídeo. Una propiedad relacionada con la monotonicidad que se utiliza algunas veces en la literatura es la llamada “no saciedad”.

**Definición 14** *Principio de no saciedad*
*Se dice que una relación de preferencias es "no saciada" en la canasta y si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $x \in X$ que se encuentra a una distancia menor que $\epsilon$ de $y$ de manera que $x \succ y$.*

La relación de preferencias representada por $u(x) = -d(x, x^*)$ no satisface monotonicidad pero es "no saciada" en cualquier canasta excepto en $x^*$.

Por lo tanto podemos asegurar que toda relación de preferencias que es monótona en la canasta $y$ también cumple con "no saciedad" en $y$, pero el caso contrario no es cierto.

## 4.3. Continuidad

Pasemos ahora a examinar la segunda propiedad de las preferencias. Para esto necesitamos una topología en la cual trabajar. Utilizaremos la estructura topológica de $I\!R^K$ (con la función estándar de distancia $d$ que definimos arriba) para aplicar la definición de continuidad que presentamos cuando hablamos de Continuidad de las Preferencias en el Capítulo 2.

**Definición 15** *Decimos que una relación de preferencias $\succsim$ satisface **continuidad** si para todo $a, b \in X$, $a \succ b$ implica que existe un $\epsilon > 0$ tal que $x \succ y$ para cualquier $x$ e $y$ tal que $d(x, a) < \epsilon$ y $d(y, b) < \epsilon$.*

## 4.4. Existencia de una representación en términos de Utilidad

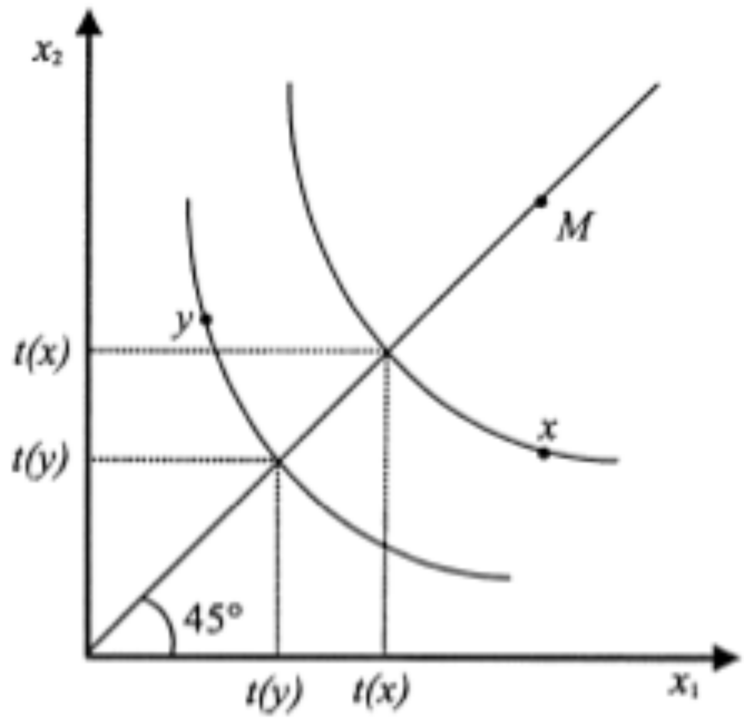
Recordemos que el Teorema de Debreu garantiza que cualquier relación de preferencias continua tiene una representación en términos de utilidad a través de alguna función de utilidad continua. Si además asumimos monotonicidad, tenemos una prueba simple y elegante para este resultado.

**Proposición** Cualquier relación de preferencias de un consumidor que satisfaga monotonicidad y continuidad puede ser representada por una función de utilidad.

**Demostración**
Primero mostraremos que para cualquier canasta $x$, existe una canasta en la diagonal principal (que tiene la misma cantidad de cada producto), de manera que el consumidor está indiferente entre esa canasta y la canasta $x$. (Ver gráfico abajo).

La canasta $x$ es al menos tan buena como la canasta $0 = (0, \ldots, 0)$. Por otro lado, la canasta $M = (\text{máx}_k\{x_k\}, \ldots, \text{máx}_k\{x_k\})$ es al menos tan buena como $x$. Tanto 0 como $M$ se ubican en la diagonal principal. Por continuidad, existe una canasta en la diagonal principal que es indiferente a $x$ (si no me creen lo pueden demostrar!). Por monotonicidad esta canasta es única; la denotamos $(t(x), \ldots, t(x))$. Sea $u(x) = t(x)$. Para ver que las función $u$ representa a las preferencias, notar que por transitividad de las preferencias $x \succsim y$ si y solo si $(t(x), \ldots, t(x)) \succsim (t(y), \ldots, t(y))$ y por monotonicidad esto es verdad si y solo si $t(x) \geq t(y)$.

Figura 4.1:




## 4.5. Convexidad

Veamos un ejemplo para introducir este tema. Consideremos un escenario en el cual las alternativas son candidatos a alguna función pública (i.e. políticos). Los candidatos y sus posiciones (ideológicas) se pueden ordenar de izquierda a derecha como se muestra a continuación.

$$- - -a - - - b - - - - - - c - - - - - - d - - - - - - - - - -e$$

Bajo circunstancias normales, si sabemos que un votante prefiere $b$ a $d$, entonces tenderemos a concluir que:

- él prefiere $c$ a $d$, pero no necesariamente $a$ a $d$ (el candidato $a$ podría ser demasiado extremo).

- él prefiere $d$ a $e$ (es decir, no encontramos plausible que el votante perciba como una mejora sobre $d$ moverse tanto a la derecha como a la izquierda ).

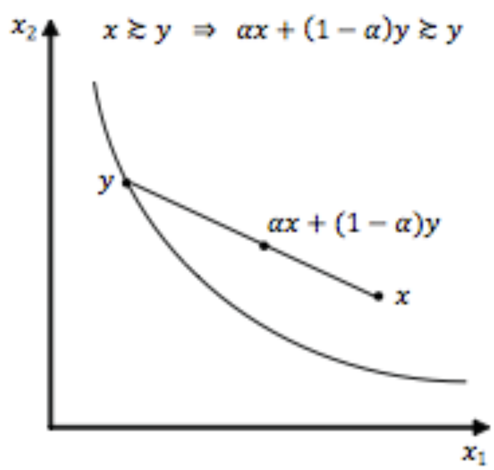
La noción de preferencias convexas captura dos intuiciones similares que son propicias para situaciones donde existe una "geografía" del conjunto de alternativas en el sentido de que podemos hablar de una alternativa que se encuentra entre otras dos:

- Si $x$ es preferida a $y$, entonces parte del camino desde $y$ hacia $x$ (i.e. alejarse de $y$ en dirección a $x$) es también una mejora sobre $y$. Esta observación da lugar a la primer definición de convexidad que daremos.
- Si $z$ está entre $x$ e $y$ entonces es imposible que ambas $x$ e $y$ sean mejores que $z$. Esta observación da lugar a la segunda definición de convexidad que daremos.

La noción de convexidad es apropiada para una situación en la cual el siguiente argumento es legítimo: "si un movimiento es una mejora también lo es cualquier movimiento que sea parte de dicho recorrido", mientras que el siguiente argumento no lo es: "si un movimiento es dañino entonces también lo es un movimiento que sea parte de dicho recorrido".

**Definición 16** *Convexidad 1*
*La relación de preferencias* $\succsim$ *satisface Convexidad 1 si para* $x \succsim y$ *y* $\alpha \in (0,1)$ *se tiene que* $\alpha x + (1-\alpha) y \succsim y$.

Figura 4.2: Convexidad 1

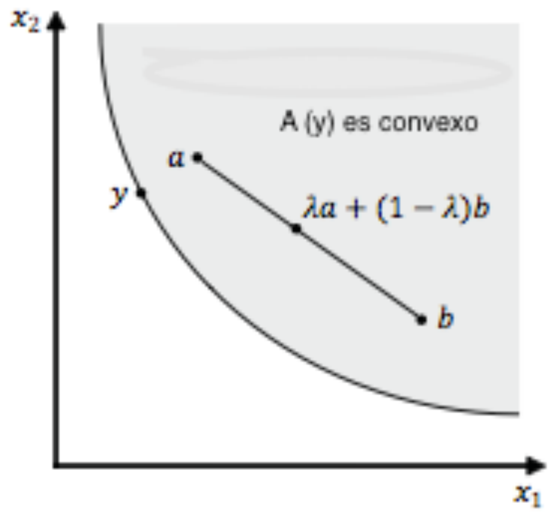



**Definición 17** *Convexidad 2*
*La relación de preferencias* $\succsim$ *satisface Convexidad 2 si para todo* $x, y, z$ *tal que* $z = \alpha x + (1-\alpha) y$ *para algún* $\alpha \in (0,1)$, *se cumple que* $z \succsim x$ *o que* $z \succsim y$.

Veremos a continuación otra definición de convexidad, que utiliza la noción de un conjunto convexo. Recordar que un conjunto $A$ es convexo si para todo $a, b \in A$ y para todo $\lambda \in [0,1]$, $\lambda a + (1-\lambda) b \in A$.

**Definición 18** *Convexidad 3*
*La relación de preferencias $\succsim$ satisface Convexidad 3 si para todo $y$, el conjunto $A(y) = \{z \in X | z \succsim y\}$ es convexo.*

Figura 4.3: Convexidad 3




La intuición detrás de esta definición es que si tanto $z_1$ como $z_2$ son mejores que $y$, entonces el promedio de $z_1$ y $z_2$ es definitivamente mejor que $y$.

Ahora vamos a mostrar que las tres definiciones son equivalentes.

**Proposición** Si la relación de preferencias $\succsim$ satisface una de las definiciones de convexidad, i.e., convexidad, 1, convexidad 2 o convexidad 3, entonces satisface las otras dos.

**Demostración**
Asumamos que $\succsim$ satisface convexidad 1 y sean $x, y, z \in X$ tal que $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ para algún $\alpha \in (0, 1)$. Sin pérdida de generalidad, asumamos $x \succsim y$. Por la definición de convexidad 1 sabemos que $z \succsim y$. Luego, $\succsim$ satisface convexidad 2.

Asumamos que $\succsim$ satisface convexidad 2 y sean $z, z' \in A(y)$. Luego, por convexidad 2, $\alpha z + (1 - \alpha)z'$ es al menos tan preferida como $z$ o $z'$ (o ambas). En cualquier caso, por transitividad, $\alpha z + (1 - \alpha)z' \succsim y$, esto es $\alpha z + (1 - \alpha)z' \in A(y)$ y por lo tanto, $\succsim$ satisface la definición convexidad 3.

Asumamos que $\succsim$ satisface convexidad 3. Si $x \succsim y$, entonces tanto $x$ como $y$ pertenecen a $A(y)$ y por lo tanto $\alpha x + (1 - \alpha)y \in A(y)$, lo que significa que $\alpha x + (1 - \alpha)y \succsim y$. Luego, $\succsim$ satisface convexidad 1.

También existe una versión fuerte del concepto de convexidad.

**Definición 19** *Convexidad Estricta*
*La relación de preferencias $\succsim$ satisface convexidad estricta si $a \succsim y$, $b \succsim y$, $a \neq b$ y $\lambda \in (0,1)$, implica que $\lambda a + (1-\lambda)b \succ y$.*

Veamos algunos ejemplos.

1. Las preferencias representadas por $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ satisfacen convexidad estricta.
2. Las preferencias representadas por $\min\{x_1, x_2\}$ y por $x_1+x_2$ satisfacen convexidad pero no convexidad estricta.
3. Las preferencias lexicográficas satisfacen convexidad estricta.
4. Las preferencias representadas por $x_1^2 + x_2^2$ no satisfacen convexidad.

Vamos a analizar ahora la conexión de esta propiedad con la función de utilidad. Es decir veremos las propiedades que tiene la función de utilidad que representa preferencias convexas.

### 4.5.1. Cuasi-Concavidad

**Definición 20** *Una función $u$ es cuasi-cóncava si para todo $y$, el conjunto $\{x|u(x) \geq u(y)\}$ es convexo.*

La noción de cuasi-concavidad es similar a la de concavidad en el sentido que para cualquier función $f$ que sea cuasi-cóncava o cóncava, el conjunto $\{x|f(x) \geq f(y)\}$ es convexo para cualquier $y$. Recordemos que $u$ es cóncava si para todo $x, y$ y $\lambda \in [0,1]$, tenemos que $u(\lambda x + (1-\lambda y) \geq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$.

Obviamente, si una relación de preferencias es representada por una función de utilidad, entonces esta relación de preferencias es convexa si y solo si la función de utilidad es cuasi-cóncava. No obstante, la convexidad de $\succsim$ no implica que una función de utilidad que representa a $\succsim$ sea cóncava. Más aún, hay ejemplos de preferencias continuas y convexas que no pueden ser representadas por ninguna función cóncava.

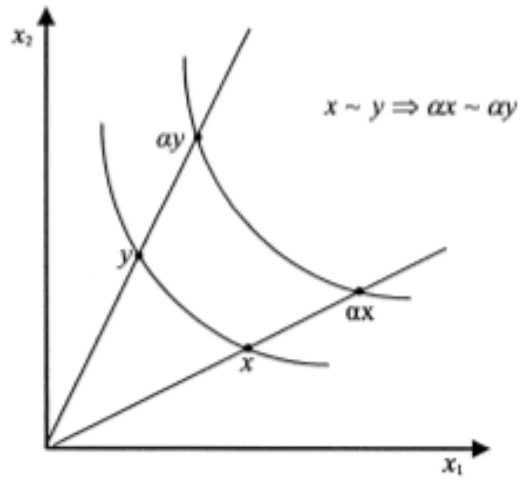
## 4.6. Clases especiales de Preferencias

Es usual que en economía discutamos algunas variaciones de lo que se conoce como consumidor clásico. En particular, tal consumidor es aquel cuyas preferencias satisfacen Monotonicidad, Continuidad y Convexidad. A menudo, asumimos que el consumidor posee preferencias que pertenecen a una clase más estrecha caracterizada por propiedades especiales adicionales. Estas clases o grupos de preferencias tienen representaciones en términos de utilidad que son sencillas y estilizadas desde un punto de vista matemático lo que facilita enormemente el análisis. A continuación vamos a ver algunos ejemplos de dos clases de preferencias que son “populares” en la literatura.

### 4.6.1. Preferencias Homotéticas

**Definición 21** *Una relación de preferencias* $\succsim$ *es homotética si* $x \succsim y$ *implica que* $\alpha x \succsim \alpha y$ *para todo* $\alpha > 0$.

Figura 4.4: Preferencias Homotéticas




Veamos un ejemplo. Las preferencias representadas por $u(x) = \prod_{k=1,\ldots,K} x_k^{\beta_k}$, donde $\beta_k$ es positivo, son homotéticas. En términos generales, cualquier relación de preferencias representada por una función de utilidad $u$ que sea homogénea de grado $\lambda$ (esto es $u(\alpha x) = \alpha^\lambda u(x)$) es homotética. La razón radica en que dado

$$
\begin{aligned}
& x \succsim y \\
\iff \quad & u(x) \geq u(y) \\
\iff \quad & \alpha^\lambda u(x) \geq \alpha^\lambda u(y) \\
\iff \quad & u(\alpha x) \geq u(\alpha y) \\
\iff \quad & \alpha x \succsim \alpha y.
\end{aligned}
$$

Otro ejemplo de preferencias homotéticas son las Lexicográficas.

**Proposición** Cualquier relación de preferencias homotética, continua y monótona en el espacio que define la canasta de bienes puede ser representada por una función de utilidad continua y homogénea de grado uno.[1]

**Demostración**
Ya hemos probado que cualquier canasta $x$ tiene asociada una única canasta $(t(x), \ldots, t(x))$ sobre la diagonal principal de manera que $x \sim (t(x), \ldots, t(x))$ y que la función $u(x) =$

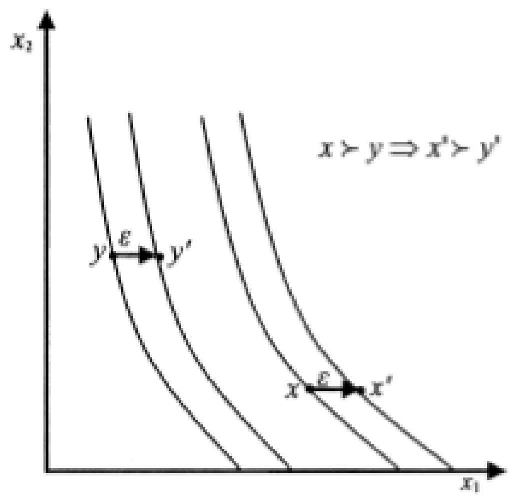
[1]Notar que las preferencias Lexicográficas no son continuas.

$t(x)$ representa dichas preferencias. Por el supuesto de homoteticidad de las preferencias tenemos que $\alpha x \sim (\alpha t(x), \ldots, \alpha t(x))$ y por lo tanto $u(\alpha x) = \alpha t(x) = \alpha u(x)$. La demostración que $u(x)$ es continua se deja como ejercicio (hacer!!).

### 4.6.2. Preferencias Cuasi-Lineales

**Definición 22** *Una relación de preferencias es cuasi-lineal en el bien 1 (llamado el "numerario") si $x \succsim y$ implica que $(x + \epsilon e_1) \succsim (y + \epsilon e_1)$, donde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ y $\epsilon > 0$.*

Figura 4.5: Preferencias Cuasi-lineales en el bien 1




La intuición detrás de este tipo de preferencias puede explicarse de la siguiente manera. Las curvas de indiferencia de preferencias cuasi-lineales en el bien 1 son paralelas entre sí (con respecto al eje del bien 1). Esto es, si $I$ es una curva de indiferencia, entonces el conjunto $I_\epsilon = \{x | \text{existe } y \in I \text{ tal que } x = y + (\epsilon, 0, \ldots, 0)\}$ es también una curva de indiferencia. Cualquier relación de preferencias representada por $x_1 + v(x_2, \ldots, x_K)$ para alguna función $v$ es cuasi-lineal en el bien 1. Más aún tenemos el siguiente resultado.

**Proposición** Cualquier relación de preferencias continua que satisface monotonicidad en sentido fuerte (al menos en el bien 1) y cuasi-linealidad en el bien 1 puede ser representada por una función de utilidad del tipo $x_1 + v(x_2, \ldots, x_K)$.

Para la prueba necesitamos primero el siguiente Lema.

**Lema**
Sea $\succsim$ una relación de preferencias monótona, continua, cuasi-lineal y monótona en

sentido fuerte en el bien 1. Entonces, para cada vector $(x_2, \ldots, x_K)$ existe un número $v(x_2, \ldots, x_K)$ tal que $(0, x_2, \ldots, x_K) \sim (v(x_2, \ldots, x_K), 0, \ldots, 0)$.

**Demostración del Lema**

Probaremos solamente el caso en el que $K = 2$. Sea $T = \{t|(0,t) \succ (x_1, 0)$ para todo $x_1\}$. Asumamos $T \neq \emptyset$ y denotemos $m = \text{ínf}\, T$.[2] Distinguimos entre dos casos.

1. $m \in T$. Luego $m > 0$ y $(1, m) \succ (0, m)$. Por continuidad, existe un $\epsilon > 0$ tal que $(1, m - \epsilon) \succ (0, m)$, y por lo tanto $(1, m - \epsilon) \succ (x_1 + 1, 0)$ para todo $x_1$. Dado que $m = \text{ínf}\, T$, entonces existe un $x_1^*$ tal que $(x_1^*, 0) \succsim (0, m - \epsilon)$, y por la cuasi-linealidad en el bien 1, $(x_1^* + 1, 0) \succsim (1, m - \epsilon)$, que es una contradicción.

2. $m \notin T$. Luego $(x_1^*, 0) \sim (0, m)$ para algún $x_1^*$. Por el supuesto de monotonicidad fuerte en el bien 1, $(x_1^* + 1, 0) \succ (0, m)$. Por continuidad, existe un $\epsilon > 0$ tal que $(x_1^* + 1, 0) \succ (0, x_2)$, para cualquier $m + \epsilon \geq x_2 \geq m$, lo que contradice $m = \text{ínf}\, T$.

Consecuentemente, $T = \emptyset$, y para cada $x_2$ existe un $x_1$ tal que $(x_1, 0) \succsim (0, x_2) \succsim (0, 0)$, y por lo tanto, por continuidad $(v(x_2), 0) \sim (0, x_2)$ para algún número $v(x_2)$. Esto completa la prueba del Lema.

**Demostración de la Proposición**

Por el Lema anterior, para cada $(x_2, \ldots, x_K)$ existe un número $v(x_2, \ldots, x_K)$ de manera que $(v(x_2, \ldots, x_K), 0, \ldots, 0) \sim (0, x_2, \ldots, x_K)$. Luego, por la cuasi-linealidad en el bien 1, para cada canasta $x$, $(x_1 + v(x_2, \ldots, x_K), 0 \ldots, 0) \sim (x_1, x_2, \ldots, x_K)$ y por lo tanto debido a la monotonicidad fuerte en el primer bien, la función $x_1 + v(x_2, \ldots, x_K)$ representa a $\succsim$.

Esta proposición muestra que cualquier relación de preferencias continua que es cuasi-lineal en el primer bien es consistente con un procedimiento de acuerdo al cual el consumidor se pregunta cuál es el valor (en términos del primer bien) de la combinación de los bienes $2, \ldots, K$ y dicha evaluación es independiente de la cantidad del primer bien.

Veamos otro resultado sobre la conexión entre funciones de utilidad y preferencias.

**Proposición** Cualquier relación de preferencias $\succsim$ continua sobre $\mathbb{R}^K$ que satisface monotonicidad en sentido fuerte y cuasi-linealidad en todos los bienes puede ser representada por una función de utilidad de la forma $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k x_k$.

Mostraremos dos pruebas alternativas para este resultado. Acá solamente veremos el caso en que $K = 2$, el caso general se deja como ejercicio.

**Demostración 1**

Usando la proposición anterior, tenemos que la relación de preferencias sobre el espacio

---

[2]La idea de la prueba es probar que $T = \emptyset$.

de la canasta es representada por la función $u(x_1, x_2) = x_1 + v(x_2)$, donde $(0, x_2) \sim (v(x_2), 0)$. Sea $(0, 1) \sim (\alpha_2, 0)$.

Es suficiente mostrar que $v(x_2) = \alpha_2 x_2$.[3]

Asumamos que para algún $x_2$ tenemos que $v(x_2) > \alpha_2 x_2$ (un argumento similar puede utilizarse para el caso $v(x_2) < \alpha_2 x_2$). Elijamos dos números enteros $S$ y $T$ tal que $v(x_2)/\alpha_2 > S/T > x_2$.

Notemos que si $(a, 0) \sim (0, b)$, entonces todos los puntos $(ka, \ell b)$ para los cuales $k+\ell = n$ yacen sobre la misma curva de indiferencia ($k, \ell, n$ son enteros no negativos). La prueba es por inducción sobre $n$. Por definición se cumple para el caso $n = 1$. El supuesto inductivo es que $((n-1)a, 0) \sim ((n-2)a, b) \sim \ldots \sim (a, (n-2)b) \sim (0, (n-1)b)$. Por la cuasi-linealidad en el bien 1 tenemos que $(na, 0) \sim ((n-1)a, b) \sim \ldots \sim (a, (n-1)b)$ y por la cuasi-linealidad en el bien 2 también sabemos que $(a, (n-1)b) \sim (0, nb)$.

Por lo tanto, $(0, Tx_2) \sim (Tv(x_2), 0)$ y $(0, S) \sim (S\alpha_2, 0)$. No obstante, dado que $S > Tx_2$, tenemos que $(0, Tx_2) \prec (0, S)$, y dado que $Tv(x_2) > S\alpha_2$, tenemos que $(Tv(x_2), 0) \succ (S\alpha_2, 0)$, lo que es una contradicción.

**Demostración 2**

Mostraremos primero que $v(a + b) = v(a) + v(b)$ para todo $a$ y $b$. Por definición de $v$, $(0, a) \sim (v(a), 0)$ y $(0, b) \sim (v(b), 0)$. Por la cuasi-linealidad en el bien 1, $(v(b), a) \sim (v(a) + v(b), 0)$ y por la cuasi-linealidad en el bien 2 $(0, a + b) \sim (v(b), a)$. Por lo tanto, $(0, a + b) \sim (v(a) + v(b), 0)$ y $v(a + b) = v(a) + v(b)$.

Sea $v(1) = c$. Entonces, para cualquier número natural $m$ y $n$ tenemos que $v(m/n) = cm/n$. Dado que $v(0) = 0$ y que $v$ es una función creciente, debe cumplirse que $v(x) = cx$ para todo $x$.

La ecuación $v(a + b) = v(a) + v(b)$ se la llama ecuación funcional de Cauchy y, sin tener que hacer supuestos adicionales, como monotonicidad, existen funciones no lineales que la satisfacen.

## 4.7. Preferencias diferenciables y el uso de derivadas

En microeconomía frecuentemente asumimos que las funciones de utilidad son diferenciables y por lo tanto usamos herramientas de cálculo estándar para analizar al consumidor. En este curso vamos a evitar (casi siempre) el uso de estas herramientas. Esta decisión deliberada tiene la intención de alejarlos a uds. del uso de un enfoque "mecánico" a la teoría económica.

Una pregunta natural es si podemos darle alguna interpretación económica al hecho de poder diferenciar una función de utilidad. Vamos a introducir una definición no convencional de *preferencias diferenciables*. Básicamente, desde un punto de vista tradicional, las preferencias diferenciables requieren que la dirección de mejora pueda ser descripta a través de "precios locales".

[3] Notar que $\alpha_1 = 1$.

Concentrémonos en preferencias monótonas y convexas.

**Definición 23** *Para cualquier vector $x$ decimos que el vector $z \in I\!R^K$ es una mejora si $x + z \succ x$. También decimos que $d \in I\!R^K$ es una dirección de mejora en $x$ si cualquier pequeño movimiento desde $x$ en la dirección $d$ es una mejora, esto es, existe algún $\lambda^*$ tal que para todo $\lambda^* > \lambda > 0$ el vector $\lambda d$ es una mejora.*

Sea $D(x)$ el conjunto de todas las direcciones de mejora en $x$. Notemos lo siguiente:

1. Si $d \in D(x)$, entonces $\lambda d \in D(x)$.

2. Si las preferencias son estrictamente convexas, luego cualquier mejora es también una dirección de mejora.

3. Si las preferencias satisfacen monotonicidad fuerte, continuidad y convexidad, entonces cualquier mejora es también una dirección de mejora. Para ver esto, asumamos que $x+d \succ x$. Tomemos $\lambda^* = 1$. Para cualquier $0 < \lambda < 1$ mostraremos que $x + \lambda d = \lambda(x + d) + (1 - \lambda)x \succ x$. Por continuidad, existe un vector $z \succ x$ con $z_k \leq (x + d)_k$ para todo $k$ y con desigualdad estricta para todo $k$ para el cual $(x + d)_k > 0$. Para todo $k$ tenemos que $(x + \lambda d)_k \geq (\lambda z + (1 - \lambda)x)_k$ y $x + \lambda d \neq \lambda z + (1 - \lambda)x$. Dada la monotonicidad fuerte de las preferencias, $x + \lambda d \succ \lambda z + (1 - \lambda)x$. Finalmente, por convexidad, $\lambda z + (1 - \lambda)x \succsim x$. Por lo tanto, $x + \lambda d \succ x$.

4. Dada la propiedad de monotonicidad de las preferencias, si $d_k > 0$ para todo $k$, entonces $d \in D(x)$. En otras palabras $D(x)$ incluye todos los vectores cuyas coordenadas son positivas.

**Definición 24** *Decimos que las preferencias monótonas de un consumidor, $\succsim$, son* ***diferenciables en la canasta*** *$x$ si existe un vector $v(x)$ que contiene $K$ números no negativos de manera que $D(x) = \{d \in I\!R^K | d \cdot v(x) > 0\}$ (donde $d \cdot v(x)$ es el producto interno de los vectores $d$ y $v(x)$).*

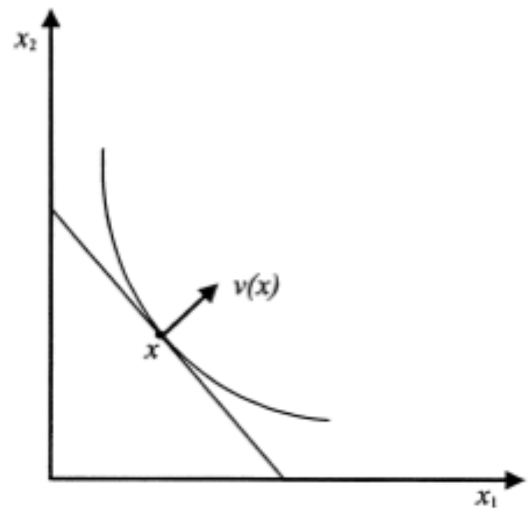
*El vector $(v_1(x), \ldots, v_K(x))$ se interpreta como el vector de "valores subjetivos" de los bienes. Comenzando en $x$, cualquier movimiento lo suficientemente pequeño en una dirección que es evaluada por este vector como positiva es una mejora. Decimos que $\succsim$ es* ***diferenciable*** *si es diferenciable en cualquier canasta $x$ (ver gráfico siguiente).*

Veamos algunos ejemplos.

1. Las preferencias representadas por $2x_1+3x_2$ son diferenciables en cualquier punto $x$, más aún, $v(x) = (2, 3)$.

2. Las preferencias representadas por $\text{mín}\{x_1, \ldots, x_K\}$ son diferenciables solamente en los puntos donde hay un único bien $k$ para el cual $x_k < x_\ell$ para todo $\ell \neq k$ (verificar!). Por ejemplo, en el punto $x = (5, 3, 8, 6)$, tenemos que $v(x) = (0, 1, 0, 0)$.

Figura 4.6: Preferencias Diferenciables




Finalmente veremos un resultado muy útil e intuitivo. Mostraremos que cuando las preferencias son representadas por una función de utilidad $u$ que es diferenciable con derivada parcial positiva y cuasi-cóncava, las preferencias son diferenciables. Muchos de los ejemplos con funciones de utilidad que se utilizan en la literatura económica son diferenciables.

**Proposición**
Asuma que $u$ es una función de utilidad diferenciable con derivada parcial positiva y cuasi-cóncava que representa las preferencias de un consumidor ($\succsim$), entonces las preferencias son diferenciables.

Primero necesitamos algunas notaciones adicionales. Dada una función de utilidad $u$ que es diferenciable, sea $du/dx_k(x)$ la derivada parcial de $u$ con respecto al bien $k$ en el punto $x$. Sea $\nabla u(x)$, el gradiente, el vector de estas derivadas parciales. Recordar que el significado de diferenciabilidad de $u$ en el punto $x$ es que la tasa de cambio de $u$ al moverse desde $x$ en cualquier dirección $d$ es $d \cdot \nabla u(x)$.
Esto es, $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{u(x+\epsilon d)-u(x)}{\epsilon} = d \cdot \nabla u(x)$.

**Demostración**
Ahora, sea $v(x) = \nabla u(x)$. Mostraremos que $D(x) = \{d \in I\!R^K | d \cdot v(x) > 0\}$.

Primero mostramos que $D(x) \subseteq \{d \in I\!R^K | d \cdot v(x) > 0\}$. Por contradicción, sea $d \in D(x)$ donde $d \cdot v(x) \leq 0$. Sin pérdida de generalidad, sea $x + d \succ x$, dado que de otra manera $d$ siempre puede ser redimensionado. Por continuidad, existe $d' \neq d, d'_k \leq d_k$ para todo $k$, tal que $x + d' \succ x$. Por convexidad y monotonicidad fuerte de las preferencias (que siguen de la cuasi-concavidad y derivadas parciales positivas de $u$) $d' \in D(x)$. Sin embargo, $d' \cdot v(x) < 0$ y por lo tanto por diferenciabilidad de $u$, para $\delta$ lo suficientemente pequeño, $u(x + \delta d') < u(x)$. Una contradicción.

En la otra dirección, $D(x) \supseteq \{d \in I\!R^K | d \cdot v(x) > 0\}$, sigue inmediatamente de la diferenciabilidad de $u$ dado que $d \cdot v(x) > 0$ implica $u(x + \epsilon d) > u(x)$ para $\epsilon$ lo suficientemente pequeño. Esto es $d \in D(x)$.

**Referencias**

- [Rubinstein, 2012]: Capítulo 4.
- [Mas-Colell et al., 1995]: Capítulo 3, A-C.
- [Kreps, 1990]: pags. 32-37.
- [Arrow y Hahn, 1971]

# Capítulo 5

# Demanda: Elección del Consumidor

## 5.1. La elección racional del consumidor a partir de un conjunto presupuestario

El tema anterior que discutimos fue el de las preferencias de los consumidores. Ahora vamos a adoptar el paradigma del "hombre racional" para discutir la elección del consumidor.

Dada una relación de preferencias del consumidor, $\succsim$, sobre $X = \mathbb{R}^K_+$, podemos hablar de su elección a partir de un conjunto arbitrario de canastas. Sin embargo, dado que estamos sentando las bases para desarrollar un "modelo de precios", estamos interesados en la elección del consumidor dentro de una clase particular de problemas de elección llamada conjuntos presupuestarios.

**Definición 25** *Un conjunto presupuestario es un conjunto de canastas que puede representarse como $B(p, w) = \{x \in X | px \leq w\}$, donde $p$ es un vector de números positivos (interpretado como precios) y $w$ es un número positivo (interpretado como la riqueza del consumidor).*

Obviamente, cualquier conjunto $B(p, w)$ es compacto (es cerrado dado que está definido a partir de una desigualdad débil, y acotado dado que para cualquier $x \in B(p, w)$ y para todo $k$, $0 \leq x_k \leq w/p_k$). Este conjunto también es convexo, dado que si $x, y \in B(p, w)$, entonces $px \leq w$, $py \leq w$, $x_k \geq 0$ e $y_k \geq 0$ para todo $k$. Luego, para cualquier $\alpha \in [0, 1]$, $p[\alpha x + (1 - \alpha)y] = \alpha px + (1 - \alpha)py \leq w$ y $\alpha x_k + (1 - \alpha)y_k \geq 0$ para todo $k$, lo que significa que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in B(p, w)$.

Nos referiremos al problema de encontrar la mejor canasta en $B(p, w)$ según $\succsim$ como el *problema del consumidor*.

**Proposición**

Si $\succsim$ es una relación continua, entonces todos los problemas del consumidor tienen solución.

**Demostración**

Si $\succsim$ es continua, entonces puede ser representada por una función de utilidad $u$. Por la definición de "representación en términos de utilidad", encontrar una canasta óptima según las preferencias $\succsim$ es equivalente a resolver $\max_{x \in B(p,w)} u(x)$. Dado que el conjunto presupuestario es compacto y que $u$ es continua, este problema tiene solución.

Para resaltar que una representación en términos de utilidad no es necesaria para este tipo de análisis y que lo podríamos hacer solamente a partir del concepto de preferencias, veamos una prueba directa de la proposición anterior que evita la noción de utilidad.

**Demostración directa**

Para cualquier $x \in B(p,w)$ defina el conjunto $Inferior(x) = \{y \in X | x \succ y\}$. Por la continuidad de las preferencias, este tipo de conjuntos es abierto. Asuma que no existe solución al problema del consumidor de maximizar $\succsim$ sobre $B(p,w)$. Luego, cada $z \in B(p,w)$ es un miembro de algún conjunto $Inferior(x)$, esto es, la colección de conjuntos $\{Inferior(x) | x \in B(p,w)\}$ cubre $B(p,w)$. Ahora, una colección de conjuntos abiertos que cubre a un conjunto compacto tiene un subconjunto finito de conjuntos que lo cubren. Por lo tanto, existe una colección finita $Inferior(x^1), \ldots, Inferior(x^n)$ que cubre a $B(p,w)$. Si $x^j$ es la canasta óptima que está en el conjunto finito $\{x^1, \ldots, x^n\}$, obtenemos que $x^j$ es una canasta óptima en $B(p,w)$, lo que es una contradicción.

**Proposición**

1. Si $\succsim$ es convexa, entonces el conjunto de soluciones para una elección a partir de $B(p,w)$ (o cualquier otro conjunto convexo) es convexo.

2. Si $\succsim$ es estrictamente convexa, entonces cada problema del consumidor tiene como máximo una solución.

**Demostración**

1. Asuma que tanto $x$ e $y$ maximizan $\succsim$ dado $B(p,w)$. Por la convexidad del conjunto presupuestario $B(p,w)$ tenemos que $\alpha x + (1-\alpha)y \in B(p,w)$ y, por la convexidad de las preferencias $\alpha x + (1-\alpha)y \succsim x \succsim z$ para todo $z \in B(p,w)$. Por lo tanto, $\alpha x + (1-\alpha)y$ es también una solución al problema del consumidor.

2. Asuma que tanto $x$ e $y$ (con $x \neq y$) son soluciones del problema del consumidor $B(p,w)$. Luego $x \sim y$ (ambas son soluciones al mismo problema de maximización) y $\alpha x + (1-\alpha)y \in B(p,w)$ (el conjunto presupuestario es convexo). Por la convexidad estricta de las preferencias, $\alpha x + (1-\alpha)y \succ x$, lo que contradice que $x$ es un canasta óptima en $B(p,w)$.

## 5.2. El problema del consumidor con preferencias diferenciables

Cuando las preferencias son diferenciables, tenemos una condición "útil" que caracteriza la solución óptima: el "valor monetario unitario (por peso o dólar)" en el punto $x^*$ del $k$-ésimo bien (que es consumido) debe ser tan grande como el "valor unitario" de cualquier otro bien (TMS=relación de precios).

**Proposición**

Asuma que las preferencias del consumidor son diferenciables con $v_1(x^*), \ldots, v_K(x^*)$ los "valores numéricos subjetivos" (ver clase anterior). Si $x^*$ es una canasta óptima en el problema del consumidor y $k$ es un bien consumido (i.e., $x_k^* > 0$), entonces debe cumplirse que $v_k(x^*)/p_k \geq v_j(x^*)/p_j$ para todos los demás bienes $j$.

**Demostración**

Asuma que $x^*$ es una solución al problema del consumidor $B(p, w)$ y que $x_k^* > 0$ y $v_j(x^*)/p_j > v_k(x^*)/p_k$ (ver gráfico 5.1). Un "movimiento" en la dirección de reducir el consumo del $k$-ésimo bien en 1 y aumentar el consumo del $j$-ésimo bien en $p_k/p_j$ es una mejora dado que $v_j(x^*)p_k/p_j/v_k(x^*) > 0$. Como $x_k^* > 0$, podemos encontrar $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño tal que es factible disminuir la cantidad de $k$ en $\epsilon$ y aumentar la cantidad de $j$ en $\epsilon p_k/p_j$. Esto lleva al consumidor a una canasta estrictamente mejor contradiciendo el supuesto que $x^*$ es la solución al problema del consumidor.

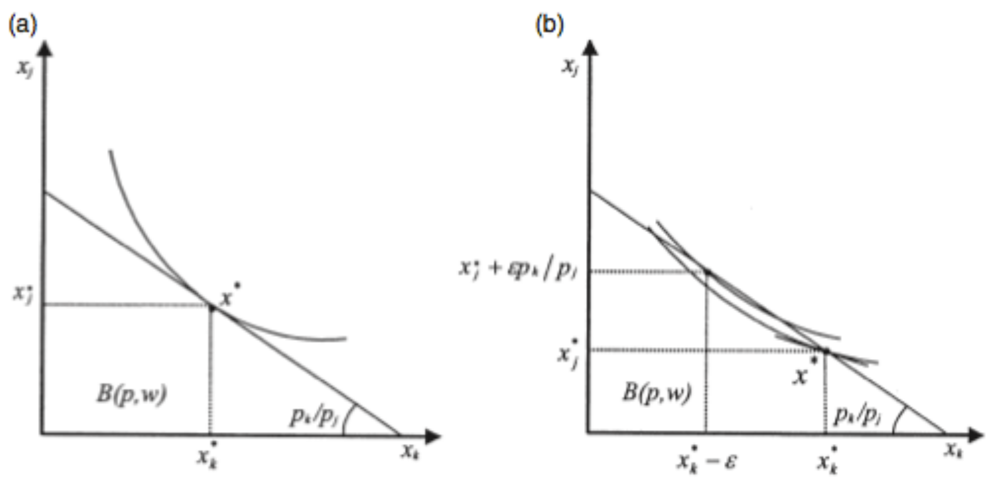



Figura 5.1: (a) $x^*$ es solución al problema $B(p, w)$. (b) $x^*$ no es solución al problema del consumidor $B(p, w)$.

**Conclusión:**

Si $x^*$ es una solución al problema del consumidor $B(p, w)$ y ambas $x_k^* > 0$ y $x_j^* > 0$, entonces el ratio $v_k(x^*)/v_j(x^*)$ debe ser igual al ratio de precios $p_k/p_j$.

A partir de este resultado pueden derivarse las condiciones “clásicas” sobre la maximización del consumidor cuando las preferencias son representadas por una función de utilidad diferenciable $u$ con derivadas parciales positivas, usando la igualdad $v_k(x^*) = \partial u/\partial x_k(x^*)$.

Para establecer condiciones suficientes para la maximización, tenemos que requerir que las preferencias sean también convexas.

**Proposición**

Si $\succsim$ es monótona en sentido fuerte, convexa, continua y diferenciable, y si en el punto $x^*$ se cumple que:

- $px^* = w$,
- para todo $k$ tal que $x_k^* > 0$, y para cualquier bien $j$, $v_k(x^*)/p_k \geq v_j(x^*)/p_j$,

entonces $x^*$ es una solución al problema del consumidor.

**Demostración**

Si $x^*$ no es una solución, entonces existe una canasta $y$ tal que $py \leq px^*$ y también $y \succ x^*$.

Sea $\mu = v_k(x^*)/p_k$ para todo $k$ con $x_k^* > 0$. Ahora,

$$0 \geq p(y - x^*) = \sum p_k(y_k - x_k^*) \geq \sum v_k(x^*)(y_k - x_k^*)/\mu$$

dado que:

1. $y$ es alcanzable,
2. para una bien $k$ con $x_k^* > 0$ tenemos que $p_k = v_k(x^*)/\mu$, y
3. para un bien $k$ con $x_k^* = 0$ tenemos que $(y_k - x_k^*) \geq 0$ y $p_k \geq v_k(x^*)/\mu$

Luego, $0 \geq v(x^*)(y - x^*)$, que contradice que $(y - x^*)$ es una dirección de mejora.

## 5.3. La función de demanda

Hemos arribado a un paso importante en el camino a desarrollar un modelo de mercado en el cual derivamos la demanda a partir de las preferencias. Asumamos que las preferencias del consumidor son tales que para cualquier $B(p, w)$ (conjunto presupuestario), el problema del consumidor tiene una única solución. La función $x(p, w)$ se la llama *función de demanda*. El dominio de la función de demanda es $\mathbb{R}^{K+1}_{++}$, mientras que su rango o imagen es $\mathbb{R}^K_+$.

**Ejemplo:**

Consideremos un consumidor en un mundo con dos bienes que tiene la siguiente relación de preferencias lexicográficas, mediante la cual le otorga la primera prioridad a la suma de las cantidades de los bienes y la segunda prioridad a la cantidad del bien 1:

$$x \succsim y \,\text{si}\, x_1 + x_2 > y_1 + y_2 \,\text{o ambas}\, x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \,\text{y}\, x_1 \geq y_1.$$

Esta relación de preferencias es estrictamente convexa pero no es continua. Más aún, induce la siguiente función de demanda no continua:

$$x((p_1, p_2), w) = \begin{cases} (0, w/p_2) & \text{si } p_2 < p_1; \\ (w/p_1, 0) & \text{si } p_2 \geq p_1. \end{cases}$$

Ahora vamos a estudiar algunas propiedades de la función de demanda.

**Proposición**

$x(p, w) = x(\lambda p, \lambda w)$ (i.e. la función de demanda es *homogénea de grado cero*).

**Demostración**

Este resultado sigue (sin tener que hacer supuestos sobre la relación de preferencias) de la igualdad básica $B(\lambda p, \lambda w) = B(p, w)$ y el supuesto de que el comportamiento del consumidor es una "elección a partir de un conjunto". Recordar que $\lambda > 0$.

Para entender esta propiedad, notar que un cambio en precios y riqueza de $(p, w)$ a $(\lambda p, \lambda w)$ no altera el conjunto de canastas alcanzables por el consumidor, esto es $B(\lambda p, \lambda w) = B(p, w)$. La homogeneidad de grado cero dice que la elección del individuo solamente depende del conjunto de puntos alcanzables.

Es importante aclarar que este resultado algunas veces se interpreta como que implica que la "inflación uniforme" no importa. Esta interpretación es incorrecta. Hemos más bien asumido y no concluido, que la elección se hace a partir de un conjunto de manera independiente de la forma en que el conjunto de elección es delimitado. Nuestro modelo de elección es estático y asumimos que el consumidor no se ve afectado en una decisión a partir de su elección en una decisión previa. La inflación afectaría el comportamiento en un modelo en donde este supuesto fuerte sea relajado.

**Proposición (Ley de Walras)**

Si la relación de preferencias es monótona, entonces cualquier solución $x$ al problema del consumidor $B(p, w)$ se ubica en la restricción presupuestaria (y, por lo tanto, $px(p, w) = w$).

**Demostración**
Si no, entonces $px < w$. Existe un $\epsilon > 0$ tal que $p(x_1 + \epsilon, \ldots, x_K + \epsilon) < w$. Por monotonicidad $(x_1 + \epsilon, \ldots, x_K + \epsilon) \succ x$, lo que contradice el supuesto que $x$ es óptima en $B(p, w)$.

**Proposición**

Si $\succsim$ es una relación de preferencias continua, entonces la función de demanda es continua en precios y riqueza.

**Demostración indirecta**

Esta prueba utiliza el Teorema del Máximo a partir del hecho de que preferencias continuas tienen asociada una representación en términos de una función de utilidad continua.

Teorema del Máximo: sea $f(x)$ una función continua sobre $X$. Sea $A$ un subconjunto de algún espacio Euclideo y $B$ una función que le asigna a cada $a \in A$ un subconjunto compacto de $X$ tal que su gráfico, $\{(a, x) | x \in B(a)\}$, es cerrado. Entonces el gráfico de la correspondencia $h$ desde $A$ hacia $X$, definida por $h(a) = \{x \in B(a) | f(x) \geq f(y) \forall y \in B(a)\}$ es cerrado.

**Demostración directa**
Esta prueba no utiliza la noción de función de utilidad.

Asumamos por contradicción. Esto es asumamos que no es continua la función de demanda. Entonces, existe una sucesión de vectores de precio y riqueza $(p^n, w^n)$ que converge a $(p^*, w^*)$ tal que $x(p^*, w^*) = x^*$, y $x(p^n, w^n)$ no converge a $x^*$. Por lo tanto, podemos asumir que $(p^n, w^n)$ es una sucesión que converge a $(p^*, w^*)$ tal que para todo $n$ la distancia $d(x(p^n, w^n), x^*) > \epsilon$, para algún $\epsilon > 0$.

Todos los números $p_k^n$ son mayores que algún número positivo $p_{min}$ y todos los números $w^n$ son menores que algún $w^{max}$. Por lo tanto, todos los vectores $x(p^n, w^n)$ pertenecen a algún conjunto compacto (el hipercubo de canastas que no contienen cantidades por encima de $w^{max}/p_{min}$), y por lo tanto, sin pérdida de generalidad (eligiendo una subsecuencia si fuera necesario), podemos asumir que $x(p^n, w^n) \to y^*$ para algún $y^* \neq x^*$.

Dado que $p^n x(p^n, w^n) \leq w^n$ para todo $n$, debe darse que $p^* y^* \leq w^*$, esto es, $y^* \in B(p^*, w^*)$. Dado que $x^*$ es la única solución para $B(p^*, w^*)$, tenemos que $x^* \succ y^*$. Por la continuidad de las preferencias, existen entornos $B_{x^*}$ y $B_{y^*}$ de $x^*$ e $y^*$ en los cuales la preferencia estricta se preserva. Para $n$ lo suficientemente grande, $x(p^n, w^n)$ está en $B_{y^*}$. Elija una canasta $z^*$ en el entorno $B_{x^*}$ de manera que $p^* z^* < w^*$. Para todo

$n$ lo suficientemente grande, $p^n z^* < w^n$; no obstante, $z^* \succ x(p^n, w^n)$, lo que es una contradicción.

**Comentario:**
La proposición anterior aplica al caso en el cual para cada conjunto presupuestario existe una única canasta que maximiza las preferencias del consumidor. El teorema del máximo aplicado al caso en el cual algún conjunto presupuestario tiene mas de un maximizador postula: si $\succsim$ es una relación de preferencias continua, entonces el conjunto $\{(x,p,w)|x \succsim y \,\text{para cada}\, y \in B(p,w)\}$ es cerrado.

## 5.4. Racionalización de funciones de demanda

Como lo hicimos en la discusión general de elección, ahora examinaremos si los procedimientos de elección son consistentes con el modelo del individuo racional. Podemos pensar en varias posibles definiciones de racionalización.

1. Un enfoque consiste en buscar una relación de preferencias (sin imponer restricciones que se ajustan al contexto del consumidor) tal que el elemento elegido de cualquier conjunto presupuestario sea la única canasta que maximiza la relación de preferencias en dicho conjunto presupuestario. Por lo tanto podríamos dar la siguiente definición.

   **Definición 26** *La relación de preferencias $\succsim$ racionaliza completamente a la función de demanda $x$ si para cualquier $(p,w)$ la canasta $x(p,w)$ es la única canasta máxima según $\succsim$ dentro de $B(p,w)$.*

2. Alternativamente, podríamos decir que *"ser racionalizable"* significa que existen preferencias tal que el comportamiento del consumidor sea consistente con la maximización de dichas preferencias, esto es:

   **Definición tentativa**
   Para cualquier $(p,w)$ la canasta $x(p,w)$ es una canasta óptima según las preferencias $\succsim$ (no necesariamente única) dentro de $B(p,w)$.

   Es importante destacar que esta última definición es "vacía" dado que cualquier función de demanda es consistente con la maximización de la "relación de indiferencia" como relación de preferencia. Esta es la razón por la cual usualmente decimos los siguiente:

   **Definición 27** *La relación de preferencias $\succsim$ racionaliza la función de demanda $x$ si las preferencias son monótonas, y para cada $(p,w)$ la canasta $x(p,w)$ es una canasta óptima según las preferencias $\succsim$ dentro de $B(p,w)$.*

Por supuesto que si el comportamiento del consumidor (la demanda) satisface homogeneidad de grado cero y la Ley de Walras, no es necesariamente racionalizable en ninguno de los dos sentidos. Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 1:**

Consideremos la función de demanda de un consumidor que gasta toda su riqueza en el bien "más caro".

$$x((p_1,p_2),w) = \begin{cases} (0, w/p_2) & \text{si } p_2 \geq p_1; \\ (w/p_1, 0) & \text{si } p_2 < p_1. \end{cases}$$

Esta función de demanda no es del todo inconcebible y, sin embargo no es racionalizable. Para ver esto, asumamos que es totalmente racionalizable o racionalizable por $\succsim$. Consideremos los dos conjuntos presupuestarios $B((1,2),1)$ y $B((2,1),1)$. Dado que $x((1,2),1) = (0,1/2)$ y $(1/2,0)$ es una canasta en el interior de $B((1,2),1)$, utilizando cualquiera de las dos definiciones de racionalización dadas debe cumplirse que $(0,1/2) \succ (1/2,0)$. Similarmente, $x((2,1),1) = (1/2,0)$ y $(0,1/2)$ es una canasta al interior de $B((2,1),1)$. Por lo tanto $(0,1/2) \prec (1/2,0)$, lo que es una contradicción.

**Ejemplo 2:**

Un consumidor elige una canasta $(z,z,\ldots,z)$ donde $z$ cumple con $z\sum p_k = w$. Este comportamiento es completamente racionalizado por cualquier relación de preferencias de acuerdo a la cual el consumidor prefiera estrictamente cualquier canasta en la diagonal principal sobre cualquier canasta que no lo esté (porque, por ejemplo, a él le interesa primordialmente comprar cantidades iguales de todos los vendedores de los $K$ productos), mientras que en la diagonal principal sus preferencias se corresponden con "más es mejor". Estas preferencias racionalizan su comportamiento según la primer definición pero no son monótonas.

Por otro lado, esta función de demanda también está completamente racionalizada por las preferencias monótonas representadas por la función de utilidad $u(x_1,\ldots,x_K) = \text{mín}\{x_1,\ldots,x_K\}$.

**Ejemplo 3:**

Consideremos un consumidor que gasta $\alpha_k$ de su riqueza en el bien $k$ (con $\alpha_k \geq 0$ y $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$). Esta regla de comportamiento no está formulada como la maximización de una relación de preferencias. Sin embargo, puede ser completamente racionalizada por una relación de preferencias representada por una función de utilidad Cobb-Douglas $u(x) = \prod_{k=1}^K x_k^{\alpha_k}$, que es una función diferenciable con derivadas estrictamente positivas en todos los puntos interiores. Una solución $x^*$ al problema del consumidor $B(p,w)$ debe satisfacer $x_k^* > 0$ para todo $k$ (notar que $u(x) = 0$ cuando $x_k = 0$ para algún $k$). Dada la diferenciabilidad de las preferencias, una condición necesaria para la optimalidad de $x^*$ es que $v_k(x^*)/p_k = v_\ell(x^*)/p_\ell$ para todo $k$ y $\ell$ donde $v_k(x^*) = du/dx_k(x^*) = \alpha_k u(x^*)/x_k^*$ para todo $k$. Se sigue que $p_k x_k^*/p_\ell x_\ell^* = \alpha_k/\alpha_\ell$ para todo $k$ y $\ell$ y por lo tanto $x_k^* = \alpha_k w/p_k$ para todo $k$.

**Ejemplo 4:**

Sea $K = 2$. Consideremos el comportamiento de un consumidor que asigna su riqueza entre los bienes 1 y 2 en la proporción $p_2/p_1$ (mientras más barato es el bien, mayor es la proporción de la riqueza que se le asigna). Por lo tanto, $x_1p_1/x_2p_2 = p_2/p_1$ y $x_i(p, w) = (p_j/(p_i + p_j))w/p_i$. Esta función de demanda satisface la ley de Walras y también es homogénea de grado cero.

Para ver que esta función de demanda está completamente racionalizada, notar que $x_i/x_j = p_j^2/p_i^2$ (para todo $i$ y $j$) y por lo tanto $p_1/p_2 = \sqrt{x_2}/\sqrt{x_1}$. La función cuasicóncava $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ satisface la condición que el ratio de sus derivadas parciales es igual a $\sqrt{x_2}/\sqrt{x_1}$. Por lo tanto, para cualquier $(p, w)$, la canasta $x(p, w)$ es solución de la maximización de $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ en $B(p, w)$.

## 5.5. Los Axiomas Débil y Fuerte de las Preferencias Reveladas

Ahora buscaremos condiciones generales que garanticen que una función de demanda $x(p, w)$ pueda ser completamente racionalizada. Un argumento similar podría aplicarse a otra (tal vez más común en libros de texto) definición de racionalización que requiere que la canasta $x(p, w)$ maximice una relación de preferencias monótona sobre $B(p, w)$. Por supuesto, como hemos visto, no se requieren necesariamente estas condiciones generales para determinar si una demanda particular es racionalizable. Adivinar es frecuentemente una excelente estrategia.

En la discusión general sobre funciones de elección, vimos que la Condición $\alpha$ era necesaria y suficiente para que una función de elección sea derivada a partir de alguna relación de preferencias. En la demostración, construimos una relación de preferencias a partir de las elecciones del tomador de decisiones utilizando conjuntos que contienen dos elementos. Sin embargo, en el contexto del consumidor, los conjuntos finitos no son los más relevantes en el ámbito de una función de elección.

Como lo vimos con anterioridad (cuando estudiamos Elección) utilizaremos el concepto de "preferencias reveladas".

**Definición 28** *Definamos $x \succ y$ si existe $(p, w)$ tal que tanto $x$ como $y$ están dentro de $B(p, w)$ y $x = x(p, w)$. En este caso diremos que $x$ es revelada como mejor que $y$.*

### 5.5.1. El Axioma Débil de las Preferencias Reveladas (WA)

Al igual que lo hicimos cuando vimos Elección, damos la siguiente definición:

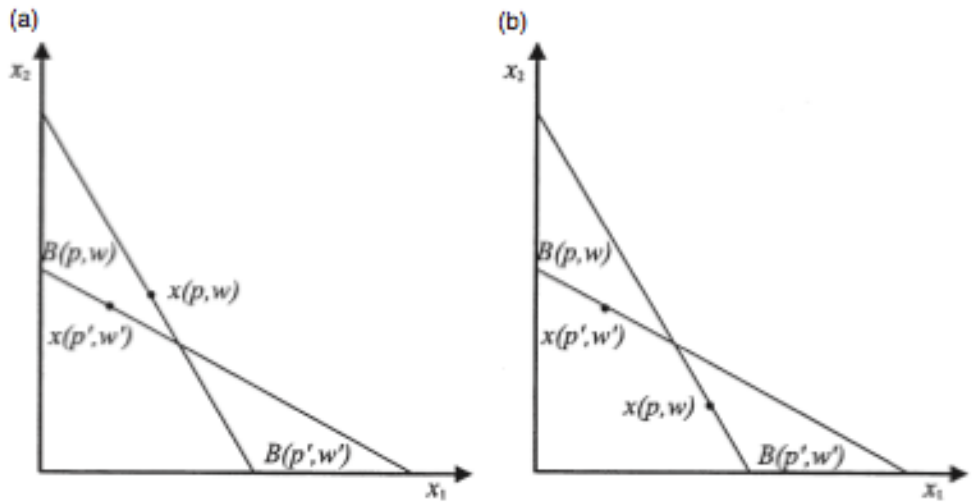
**Definición 29** *Diremos que la relación de preferencias $\succsim$ satisface el Axioma Débil de las Preferencias Reveladas (WA) si es imposible que $x$ sea revelada como mejor que $y$ e $y$ sea revelada como mejor que $x$.*

En el contexto del modelo del consumidor, el Axioma Débil puede expresarse de la siguiente manera:

$$\text{si } x(p,w) \neq x(p',w') \text{ y } px(p',w') \leq w, \text{ entonces } p'x(p,w) > w'$$

El Axioma Débil dice que la relación binaria definida por $\succ$ es asimétrica. Sin embargo, la relación no es necesariamente completa: pueden haber dos canastas $x$ e $y$ tal que para cualquier $B(p,w)$ que las contenga a ambas, $x(p,w)$ (la demanda) no es ni $x$ ni tampoco es $y$. Más aún, en la discusión general, garantizamos la transitividad mirando a la unión de un conjunto en el cual $a$ era revelada como mejor que $b$ y un conjunto en el cual $b$ era revelado como tan bueno como $c$. Sin embargo, cuando los conjuntos son conjuntos presupuestarios, su unión no es necesariamente un conjunto presupuestario (ver figura 5.2).

Figura 5.2: (a) Satisface WA. (b) No satisface WA.




Aparentemente el Axioma Débil no es una condición suficiente para extender la relación binaria $\succ$, como la hemos definido arriba, a una relación completa y transitiva (un ejemplo con tres bienes de Hicks (1956) es discutido en [Mas-Colell et al., 1995])

## 5.5.2. El Axioma Fuerte de las Preferencias Reveladas (SA)

En vistas de lo que acabamos de discutir es que introducimos ahora una condición necesaria y suficiente para que una función de demanda $x$ que satisface la ley de Walras y que es homogénea de grado 0 sea racionalizada. Esta condición se la conoce como el SA.

El SA es una propiedad de la función de demanda, que establece que la relación $\succ$, derivada a partir de la función de demanda como se mostró más arriba, es acíclica. Esto deja abierto el interrogante sobre si $\succ$ puede ser extendida a una relación de preferencias (notar podría fallar la completitud). El hecho de que es posible extender la relación $\succ$ a una relación de preferencias plena es un resultado bien conocido de la Teoría de Conjuntos. En cualquier caso, el Axioma Fuerte es de alguna manera engorroso, y utilizarlo para determinar si una cierta función de demanda es racionalizable puede no ser una tarea trivial.

**Comentario:**
Como se mencionó, la definición más estándar de racionalización requiere encontrar preferencias monótonas $\succsim$ tal que para cualquier $(p, w)$, $x(p, w) \succsim y$ para todo $y \in B(p, w)$. Procediendo a generar preferencias a partir de la función de demanda, inferimos de la existencia de un conjunto presupuestario $B(p, w)$ para el cual $x = x(p, w)$ e $y \in B(p, w)$ que $x$ es solamente débilmente preferida a $y$. Si, sin embargo, también tenemos que $py < w$, inferimos además que $x$ es estrictamente preferida a $y$.

## 5.6. Demanda decreciente

Un modelo teórico es usualmente evaluado por la razonabilidad de sus implicaciones. Si encontramos un modelo que predice conclusiones absurdas, reconsideraremos sus supuestos. Sin embargo, también tenemos que estar atentos a que cuando encontramos que un modelo falla en proveer propiedades altamente intuitivas, esto puede ser una indicación que hemos asumido “demasiado poco”.

En el contexto del modelo del consumidor, nos podemos preguntar si la intuición que la demanda por un bien cae cuando su precio aumenta es válida. Veremos que los supuestos estándar detrás del comportamiento racional del consumidor no garantizan que la demanda sea decreciente. A continuación veremos un ejemplo de una relación de preferencias que induce una demanda que es no decreciente en el precio de uno de los bienes.

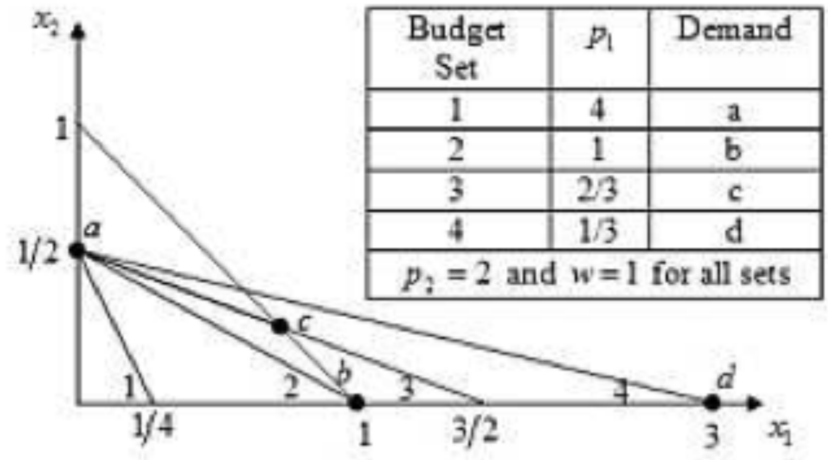
**Un ejemplo en el cual la demanda por un bien puede aumentar con el precio**
Considere las preferencias representadas por la siguiente función de utilidad:

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 & \text{si } x_1 + x_2 < 1 \\ x_1 + 4x_2 & \text{si } x_1 + x_2 \geq 1. \end{cases}$$

Estas preferencias pueden reflejar un razonamiento como el siguiente: “En la canasta $x$ hay $x_1 + x_2$ unidades de vitamina A y $x_1 + 4x_2$ unidades de vitamina B. Mi primera prioridad es tener suficiente vitamina A. Sin embargo, una vez que satisfago mi necesidad de una unidad de vitamina A, me muevo a mi segunda prioridad, que es consumir lo más posible de vitamina B”. (Ver figura 5.3.)

Considere $x((p_1, 2), 1)$. Al cambiar $p_1$ es como si se girasen las líneas de presupuesto alrededor de la canasta pivote $(0, 1/2)$. Para un precio $p_1$ alto (siempre que $p_1 > 2$), el consumidor demanda $(0, 1/2)$. Si el precio se reduce para caer en el rango $2 > p_1 \geq 1$,

Figura 5.3: Ejemplo de demanda que aumenta con el precio




el consumidor elige la canasta $(1/p_1, 0)$. Hasta ahora, la demanda por el primer bien de hecho ha aumentado al caer su precio. Sin embargo, en el rango $1 > p_1 > 1/2$ encontramos una anomalía: el consumidor compra lo más posible del segundo bien sujeto a la "restricción" de que la suma de los bienes sea al menos 1, esto es, $x((p_1, 2), 1) = (1/(2 - p_1), (1 - p_1)/(2 - p_1))$.

La relación de preferencias de este ejemplo es monótona aunque no es continua. Sin embargo, podemos construir una relación de preferencias similar que sea continua y que lleve a que la demanda sea creciente en $p_1$ en un dominio similar. Para $\delta > 0$, sea $\alpha_\delta(t)$ una función continua y creciente en el intervalo $[1 - \delta, 1]$, con $\delta > 0$, de manera que $\alpha_\delta(t) = 0$ para todo $t \leq 1 - \delta$ y $\alpha_\delta(t) = 1$ para todo $t \geq 1$. La función de utilidad,

$$u_\delta(x) = \alpha_\delta(x_1 + x_2)(x_1 + 4x_2) + (1 - \alpha_\delta(x_1 + x_2))(x_1 + x_2)$$

es continua y monótona. Para $\delta$ cercano a 0, la función $u_\delta = u$ excepto en un área estrecha por debajo del conjunto de canastas para las cuales $x_1 + x_2 = 1$.

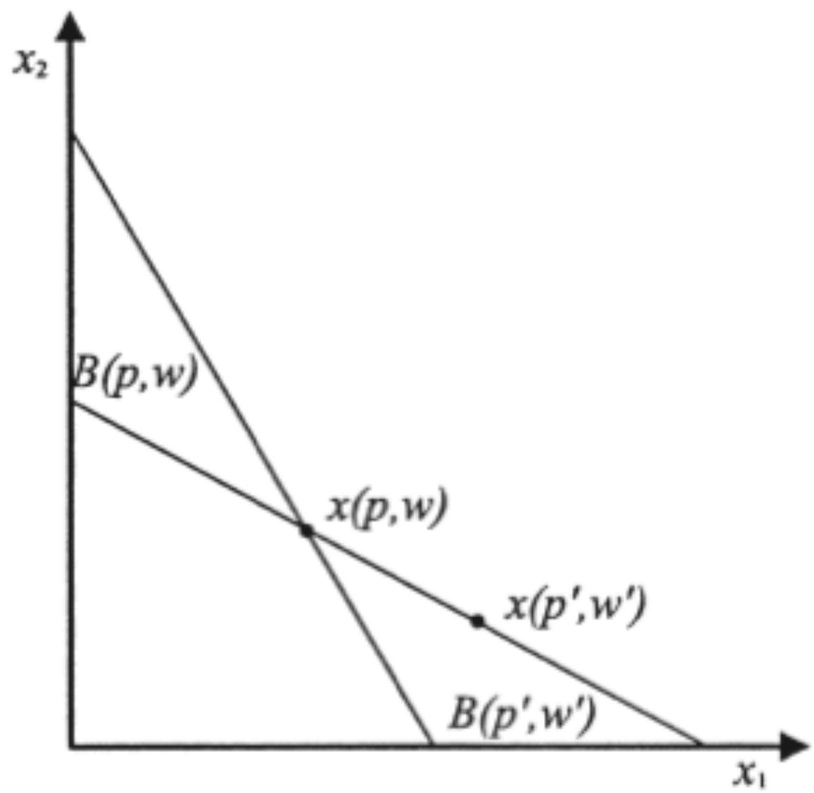
Ahora, cuando $p_1 = 2/3$, la demanda por el primer bien es $3/4$, mientras que cuando $p_1 = 1$, la demanda es al menos $(1 - 2\delta)$. Por lo tanto, para $\delta$ lo suficientemente pequeño el aumento en $p_1$ lleva a un aumento en la demanda.

## 5.7. La Ley de la Demanda

Estamos interesados en comparaciones de la demanda en diferentes circunstancias. Acabamos de ver que los supuestos clásicos sobre el consumidor no nos permiten obtener una conclusión clara sobre la relación entre la demanda del consumidor cuando se enfrenta a $B(p, w)$ y su demanda cuando se enfrenta a $B(p + (0, \dots, \epsilon, \dots, 0), w)$.

Una conclusión no ambigua puede obtenerse cuando comparamos la demanda del consumidor cuando él enfrenta el conjunto presupuestario $B(p, w)$ con la demanda que se obtiene al enfrentar el conjunto $B(p', x(p,w)p')$. En esta comparación imaginamos que el vector de precios cambia de $p$ a un vector arbitrario $p'$ y la riqueza cambia de una forma tal que el consumidor tiene exactamente los mismos recursos que le permiten consumir la misma canasta que en $(p,w)$. (Ver la figura 5.4) De la siguiente proposición se deduce que la función de demanda compensada $y(p') = x(p', p'x(p,w))$ satisface la ley de la demanda, esto es, $y_k$ es decreciente en $p_k$.

Figura 5.4: Un cambio de precios compensado desde $(p,w)$ a $(p',w')$




**Proposición**
Sea $x$ una función de demanda que satisface la ley de Walras y el WA. Si $w' = p'x(p,w)$, entonces se cumple alguna de las siguientes: $x(p',w') = x(p,w)$ o $[p'-p][x(p',w') - x(p,w)] < 0$.

**Demostración**
Asuma que $x(p',w') \neq x(p,w)$. Por la ley de Walras y el supuesto que $w' = p'x(p,w)$:

$$\begin{aligned} [p'-p][x(p',w') - x(p,w)] &= p'x(p',w') - p'x(p,w) - px(p',w') + px(p,w) \\ &= w' - w' - px(p',w') + w \\ &= w - px(p',w') \end{aligned}$$

Por el WA el lado derecho de la ecuación anterior es menor a 0.

## Referencias


- [Rubinstein, 2012]: Capítulo 5.
- [Mas-Colell et al., 1995]: Capítulo 2, A-D. Capítulo 3 D,J.
- [Varian, 1984]
- [Arrow y Hahn, 1971]
- [Kreps, 1990]: 37-45

# Capítulo 6

# Elección de Conjuntos Presupuestarios y Problema Dual

## 6.1. Preferencias indirectas

Sea $X$ el conjunto de alternativas y $D$ un conjunto de subconjuntos no vacíos de $X$. Un elemento $A$ en $D$ se interpreta como un problema de elección. Estamos interesados en la relación de preferencias sobre $D$ del tomador de decisiones. Asumiendo que el individuo tiene una relación de preferencias $\succsim$ definida sobre $X$, un enfoque para construir una relación de preferencias sobre $D$ es el siguiente: cuando se evalúa un problema de decisión en $D$, el tomador de decisiones se pregunta que alternativa elegiría a partir de este conjunto. El individuo "racional" preferirá un conjunto $A$ sobre un conjunto $B$ si la alternativa que elegiría desde $A$ es preferible (de acuerdo a las preferencias de base $\succsim$) sobre la que elegiría desde $B$. Esto lleva a la siguiente definición de $\succsim^*$, una relación a la que nos referiremos como *preferencias indirectas* inducidas a partir de $\succsim$.

**Definición 30** *$A \succsim^* B$ si $C_{\succsim}(A) \succsim C_{\succsim}(B)$.*

Obviamente $\succsim^*$ es una relación de preferencias (i.e. es completa y transitiva, ya que está definida a partir de $\succsim$). Damos ahora otra definición importante.

**Definición 31** *Si $u$ representa a $\succsim$ y la función de elección ($C_{\succsim}$) está bien definida, entonces $v(A) = u(C_{\succsim}(A))$ representa a $\succsim^*$. Llamaremos a $v$* ***función de utilidad indirecta****.*

Observemos que la función de utilidad indirecta no es otra cosa que el valor de la función de utilidad (directa) evaluada en la canasta óptima, es decir para cada $(p, w) >> 0$, el valor de la utilidad de la canasta óptima se denota $v(p, w) \in \mathbb{R}$. Es decir que $v(p, w) = u(x^*)$ para cualquier $x^* \in x(p, w)$. Esta función es muy útil como herramienta analítica.

La noción de utilidad indirecta ignora varias consideraciones que deben tomarse en cuenta cuando se comparan conjuntos de elección. Por ejemplo las siguientes consideraciones están excluidas:

- "Yo prefiero $A - \{b\}$ a $A$ aún cuando yo intento elegir $a \in A$ en cualquier caso, dado que tengo temor de cometer un error al elegir $b$".

- "Elegiré $a$ a partir de $A$ y a partir de $A - \{b\}$; sin embargo, dado que no quiero tener que rechazar $b$, yo prefiero $A - \{b\}$ sobre $A$.

- "Yo prefiero $A - \{b\}$ sobre $A$ porque elegiría $b$ a partir de $A$ y no quiero comprometerme a hacer esa elección".

Es importante notar que en algunos casos (dependiendo del conjunto $D$) uno puede reconstruir la función de elección $C_{\succsim}(A)$ a partir de las preferencias indirectas $\succsim^*$. Por ejemplo, si $a \in A$ y $A \succsim^* A - \{a\}$, luego uno puede concluir que $C_{\succsim}(A) = a$.

## 6.2. Las preferencias indirectas del consumidor

Retornemos ahora al consumidor que está eligiendo canastas a partir de conjuntos presupuestarios. Por simplicidad, asumamos que este consumidor tiene una relación de preferencias $\succsim$ que satisface los supuestos clásicos (monotonicidad, continuidad y convexidad) y que la demanda $x(p,w)$, está siempre bien definida. Las preferencias indirectas sobre conjuntos presupuestarios pueden ser relevantes en situaciones en las que el consumidor deba tomar decisiones como la elección del lugar en donde vivir o la comparación de diferentes esquemas impositivos (que afectan riqueza y precios) sobre su nivel de bienestar.

Un conjunto presupuestario está caracterizado por $K+1$ parámetros $(p,w)$. Luego, el enfoque mencionado más arriba lleva a la siguiente definición de preferencias indirecta $\succsim^*$ sobre el conjunto $\mathbb{R}^{K+1}_{++}$.

**Definición 32** $(p,w) \succsim^* (p',w')$ *si* $x(p,w) \succsim x(p',w')$.

En este contexto, en donde los precios se interpretan de la manera estándar, como precios de mercado, la relación de preferencias indirecta excluye de la discusión consideraciones como:

- "Yo prefiero vivir en un área donde el alcohol es muy caro aún cuando yo no bebo".

Notar que esto es así, ya que si yo no demando alcohol, entonces no existe tal función de demanda.

A continuación presentamos algunas propiedades básicas de las preferencias indirectas $\succsim^*$ inducidas a partir de $\succsim$ sobre el espacio de canastas:

1. Invarianza a la presentación: $(\lambda p, \lambda w) \sim^* (p,w)$ para todo $p, w, \lambda > 0$. Esta propiedad se deduce a partir de $x(\lambda p, \lambda w) = x(p,w)$.

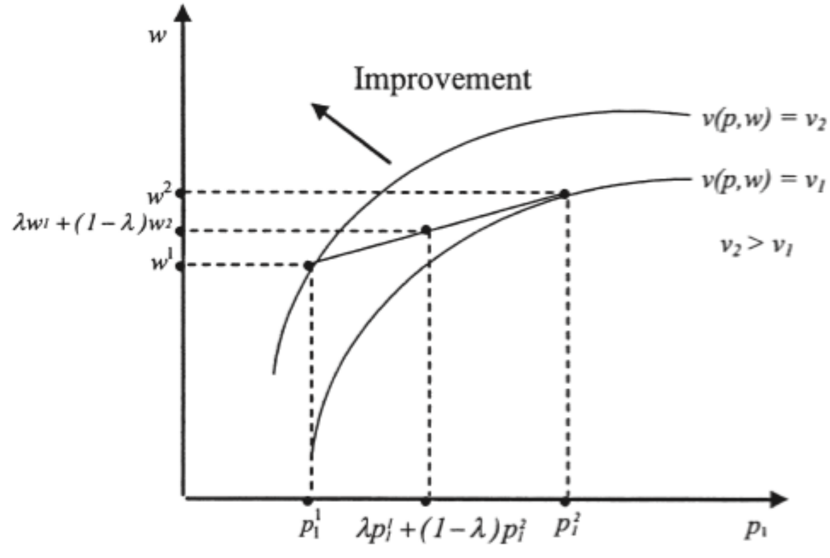
2. Monotonicidad: las preferencias indirectas son débilmente decrecientes en $p_k$ y estrictamente crecientes en $w$. Reducir el alcance del conjunto de elección nunca es beneficioso bajo este enfoque y tener más riqueza hace posible consumir canastas que contienen más de todos los bienes.

3. Continuidad: si $(p, w) \succ^* (p', w')$, entonces $y = x(p, w) \succ x(p', w') = y'$. Por continuidad, existen entornos $B_y$ y $B_{y'}$ alrededor de $y$ e $y'$, respectivamente tal que para cualquier $z \in B_y$ y $z' \in B_{y'}$, tenemos que $z \succ z'$. Por continuidad de la función de demanda, existe un entorno alrededor de $(p, w)$ en el cual la demanda se ubica dentro de $B_y$ y también existe un entorno alrededor de $(p', w')$ en el cual la demanda está en $B_{y'}$. Para cualquier par de conjuntos presupuestarios en estos dos entornos, la relación binaria $\succsim^*$ se preserva.

4. Concavidad: si $(p^1, w^1) \succsim^* (p^2, w^2)$, entonces $(p^1, w^1) \succsim^* (\lambda p^1 + (1-\lambda)p^2, \lambda w^1 + (1-\lambda)w^2)$ para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ (ver figura siguiente). Sea $z$ la mejor canasta en el conjunto presupuestario $B(\lambda p^1 + (1-\lambda)p^2, \lambda w^1 + (1-\lambda)w^2)$. Entonces $(\lambda p^1 + (1-\lambda)p^2)z \leq \lambda w^1 + (1-\lambda)w^2$ y por lo tanto $p^1 z \leq w^1$ o $p^2 z \leq w^2$. Luego, $z \in B(p^1, w^1)$ o $z \in B(p^2, w^2)$ y entonces $x(p^1, w^1) \succsim z$ o $x(p^2, w^2) \succsim z$. Del hecho que $x(p^1, w^1) \succsim x(p^2, w^2)$, se sigue que $x(p^1, w^1) \succsim z$.

Es importante notar que las propiedades de $\succsim^*$ se traducen en propiedades de la función de utilidad indirecta $v$, como se muestra en el siguiente gráfico. En particular de la propiedad 4 se deduce que si $v$ representa a $\succsim^*$, entonces $v$ es cuasi-convexa, esto es el conjunto $\{(p, w) | v(p, w) \leq v(p^*, w^*)\}$ es convexo (ver demostración más abajo).

Figura 6.1: La función de utilidad indirecta es cuasi-convexa




Enumeramos ahora las propiedades de la función de utilidad indirecta $v$.

**Proposición**

Supongamos que $u$ es una función de utilidad continua que representa a una relación de preferencias monótona $\succsim$ sobre el conjunto $X = I\!R^K_+$. Luego, la función de utilidad indirecta es:

1. Homogénea de grado 0.

2. Estrictamente creciente en $w$ y no-creciente en $p_k$ para cualquier $k$.

3. Cuasi-convexa; esto es el conjunto $\{(p, w)\ |v(p, w) \leq \overline{v}\}$ es convexo para cualquier $\overline{v}$. Recordar gráfico anterior.

4. Continua en $p$ y $w$.

**Demostración**

1. Sigue de la propiedad de invarianza a la presentación de $\succsim^*$, que a la vez se deduce de la homogeneidad de grado cero de la demanda walrasiana.

2. Sigue de la monotonicidad de $\succsim^*$.

3. Suponga que $v(p, w) \leq \overline{v}$ y $v(p', w') \leq \overline{v}$. Para cualquier $\alpha \in [0, 1]$, considere el par precio-riqueza $(p'', w'') = (\alpha p + (1 - \alpha)p', \alpha w + (1 - \alpha)w')$.

   Para establecer la cuasiconvexidad, queremos mostrar que $v(p'', w'') \leq \overline{v}$. Por lo tanto, mostraremos que para cualquier $x$ tal que $p''x \leq w''$, debemos tener que $u(x) \leq \overline{v}$. Primero notemos que si $p''x \leq w''$, entonces

   $$\alpha px + (1 - \alpha)p'x \leq \alpha w + (1 - \alpha)w'.$$

   Por lo tanto se da que $px \leq w$ o que $p'x \leq w'$ (o ambos). Si se cumple la primer desigualdad, entonces $u(x) \leq v(p, w) \leq \overline{v}$ con lo que establecemos el resultado. Si se cumple la segunda desigualdad, entonces $u(x) \leq v(p', w') \leq \overline{v}$ y obtenemos así la misma conclusión.

4. Sigue de la continuidad de $\succsim^*$.

Finalmente es importante aclarar que la función de utilidad indirecta depende de la representación en términos de utilidad elegida (en caso que exista). En particular, si $v(p, w)$ es la función de utilidad indirecta cuando la función de utilidad del consumidor es $u(x)$, entonces la función de utilidad indirecta correspondiente a la representación en términos de utilidad $\tilde{u}(x) = f(u(x))$ es $\tilde{v}(p, w) = f(v(p, w))$.

**Ejemplo: Función de demanda y utilidad indirecta**

Supongamos una función de utilidad Cobb-Doublas en un mundo con dos bienes $(K = 2)$:

$$u(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha},$$

con $A > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$. Esta función es creciente en sus dos argumentos, y es HG1.

1. Las funciones de demanda para cada uno de los bienes son (verificar!, ayuda es más conveniente trabajar con una transformación de la función de utilidad, por ejemplo $\ln(u)$.):

$$x_1(p, w) = \frac{\alpha w}{p_1},$$

$$x_2(p, w) = \frac{(1-\alpha)w}{p_2}.$$

   Notar que con preferencias Cobb-Douglas, el gasto en cada bien es una fracción constante de la riqueza para cualquier vector de precios $p$ (una proporción $\alpha$ se destina al primer bien y una proporción $(1 - \alpha)$ se destina al segundo bien.

2. La función de utilidad indirecta correspondiente a $\tilde{u} = \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2$ es

$$\begin{aligned} \tilde{v}(p, w) &= \tilde{u}(x(p, w)) \\ &= [\alpha \ln \alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)] + \ln w - \alpha \ln p_1 - (1-\alpha)\ln p_2. \end{aligned}$$

## 6.3. La Identidad de Roy

Estudiaremos ahora un método que nos sirve para obtener la función de demanda del consumidor a partir de las preferencias indirectas. Notar que en el caso de un solo bien, cada curva de indiferencia asociada a $\succsim^*$ es un rayo. Si asumimos monotonicidad de $\succsim$, la pendiente de una curva de indiferencia que pasa por $(p_1, w)$ es $w/p_1$, lo que es lo mismo que $x_1(p_1, w)$.

Ahora, si nos movemos a un caso más general (espacio multidimensional de canastas en $\mathbb{R}^K$), veremos que dada la pendiente de la curva de indiferencia a través de $(p^*, w^*)$, podemos recuperar la demanda en el punto $(p^*, w*)$. La observación clave es que el conjunto $\{(p, w)|px(p^*, w^*) = w\}$ es tangente a la curva de indiferencia, correspondiente a las preferencias indirectas, que pasa por $(p^*, w^*)$, conocer esta tangente nos permite recuperar $x(p^*, w^*)$.

**Proposición**
Asuma que la función de demanda satisface la ley de Walras. Entonces:

1. El hiperplano $H = \{(p, w)|px(p^*, w^*) = w\}$ es tangente a la curva de indiferencia asociada a $\succsim^*$ en el punto $(p^*, w^*)$.

2. Identidad de Roy: cuando las preferencias (indirectas) $\succsim^*$ son representadas por una función de utilidad (indirecta) $v$ diferenciable,

$$-\frac{\frac{\partial v}{\partial p_k}(p^*, w^*)}{\frac{\partial v}{\partial w}(p^*, w^*)} = x_k(p^*, w^*)$$

**Demostración**

1. Claramente $(p^*, w^*) \in H$ (por ley de Walras). Para cualquier $(p, w) \in H$, la canasta $x(p^*, w^*) \in B(p, w)$. Por lo tanto, $x(p, w) \succsim x(p^*, w^*)$ y por lo tanto $(p, w) \succsim^* (p^*, w^*)$.

2. Podemos escribir, $H = \{(p, w)|(x(p^*, w^*), -1)(p, w) = 0\}$ y dado que $w^* = p^*x(p^*, w^*)$, tenemos lo siguiente:

   $$H = \{(p, w)|(x(p^*, w^*), -1)(p - p^*, w - w^*) = 0\}$$

   y más aún $H$ es tangente a la curva de indiferencia que pasa por $(p^*, w^*)$. Dado que $v$ es diferenciable, la única tangente a la curva de indiferencia que pasa por $(p^*, w^*)$ también está caracterizada por el hiperplano que es perpendicular al gradiente (el vector de derivadas parciales):

   $$T = \{(p, w)|(\partial v/\partial p_1(p^*, w^*), \ldots, \partial v/\partial p_K(p^*, w^*), \partial v/\partial w(p^*, w^*))(p-p^*, w-w^*) = 0\}.$$

   Por lo tanto, $T = H$ y

   $$(\partial v/\partial p_1(p^*, w^*), \ldots, \partial v/\partial p_K(p^*, w^*), \partial v/\partial w(p^*, w^*))$$

   es proporcional al vector

   $$(x_1(p^*, w^*), \ldots, x_K(p^*, w^*), -1).$$

   De esto sigue la Identidad de Roy.

## 6.4. Un consumidor Dual

### 6.4.1. El consumidor Primal

Consideremos primero un consumidor que posee una relación de preferencias $\succsim$ (que satisface los supuestos clásicos, monotonicidad, continuidad y convexidad) y consideremos una canasta inicial $z$. Cuando el consumidor se enfrenta a los precios $p$, él puede transar $z$ por cualquier canasta $x$ tal que $px \leq pz$.

**Definición 33** *Nos referiremos al problema de elegir la mejor canasta según $\succsim$ en el conjunto $\{x|px \leq pz\}$ como el problema primal y lo denotaremos $P(p, z)$.*

*El problema tiene una solución (por los supuestos sobre $\succsim$) y cuando dicha solución es única la denotamos por $x(p, w)$.*

### 6.4.2. Una tortuga dual

Consideremos las siguientes dos afirmaciones:

1. La distancia máxima que una tortuga puede recorrer en 1 día es 1 km.

2. El tiempo mínimo que le lleva a una tortuga recorrer 1 km es un día.

A simple vista, estas dos afirmaciones parecerían ser equivalentes. De hecho esta equivalencia se basa en dos supuestos "escondidos o tácitos":

1. Para que (1) implique (2), necesitamos asumir que la tortuga recorre una distancia positiva en cualquier periodo de tiempo. Podemos contrastar esto con el caso en el cual la velocidad de la tortuga es 2 km/día, pero luego de medio día el animal debe descansar durante medio día. En este caso, la distancia máxima que la tortuga puede recorrer en 1 día es 1 km, a pesar de que es capaz de recorrer esta distancia solamente en medio día.

2. Para que (2) implique (1), necesitamos asumir que la tortuga no puede "saltar" una distancia positiva instantáneamente (i.e. en 0 tiempo). Podemos contrastar esto con el caso en el cual la velocidad de la tortuga es 1km/día, pero luego de 1 día de recorrido la tortuga puede "saltar" 1 km. Por lo tanto, el animal puede recorrer 2 km en 1 día, en otras palabras la tortuga necesita 1 día para recorrer 1 km pero en el lapso de un día ella puede viajar 2 km.

A continuación mostraremos que los supuestos mencionados arriba son suficientes para la equivalencia entre (1) y (2). Formalmente, sea $M(t)$ la distancia máxima que la tortuga puede recorrer en el momento $t$ y asumamos que $M$ es estrictamente creciente y continua. Luego, podemos mostrar que la afirmación "la distancia máxima que una tortuga puede recorrer en $t^*$ es $x^*$" es equivalente a la afirmación "el tiempo mínimo que le lleva a una tortuga recorrer $x^*$ es $t^*$".

**Demostración:**

Si la distancia máxima que la tortuga puede recorrer en el periodo $t^*$ es $x^*$ y si ella cubre la distancia $x^*$ en $t < t^*$, entonces debido a la monotonicidad estricta de $M$, la tortuga puede cubrir una distancia mayor a $x^*$ en $t^*$, una contradicción.

En el otro sentido, si a la tortuga le lleva $t^*$ cubrir la distancia $x^*$ y si ella recorre la distancia $x > x^*$ en $t^*$, entonces por la continuidad de $M$ la tortuga estará más allá de la distancia (i.e. más lejos) $x^*$ en algún momento $t < t^*$, una contradicción.

### 6.4.3. El consumidor dual

Consideremos ahora un tipo especial de consumidor que tiene en mente una canasta $z$ y (dado un vector de precios $p$) él desea consumir la canasta más barata que para él es al menos tan buena como $z$ (es decir que le reporta el mismo nivel de satisfacción).

**Definición 34** *Nos referiremos al problema* $\min_x\{px|x \succsim z\}$ *como el problema dual y lo denotamos por* $D(p, z)$*.*

*Asumiendo que existe una solución y que es única (lo que ocurre, por ejemplo, cuando las preferencias son estrictamente convexas y continuas), denotamos la solución por* $h(p, z)$ *y nos referimos a ella como la función de demanda Hicksiana*

**Definición 35** *La función* $e(p, z) = ph(p, z)$ *se llama función de gasto.*

Notar la analogía entre la función de gasto y la función de utilidad indirecta. La función de utilidad indirecta está definida como la máxima utilidad obtenida con la canasta $x$ a los precios $p$. La función de gasto está definida como el mínimo gasto necesario para obtener la canasta $x$ a los precios $p$, para un nivel de utilidad dado (el de la canasta de referencia $z$).

En particular, para cualquier $p >> 0$, $w > 0$ y $u(z) = u > u(0)$, tenemos (notar que podemos colocar como argumento de $e$ y $h$ al nivel de utilidad de referencia.)

$$e(p, u) = ph(p, u) = w, \qquad \text{y}$$

$$v(p, w) = v(p, e(p, u)) = u.$$

En otras palabras el concepto de función de gasto en el problema dual es análogo al de utilidad indirecta en el problema primal

A continuación analizamos algunas propiedades de la función de demanda Hicksiana y de la función de gasto.

1. $h(p, z) = h(\lambda p, z)$, i.e., la demanda Hicksiana es HG0 en $p$.
   $e(\lambda p, z) = \lambda e(p, z)$, i.e., la función de gasto es HG1 en precios.

**Demostración:**
El primer resultado sigue de observar que una canasta minimiza la función $\lambda px$ en un conjunto si y solo si dicha canasta minimiza la función $px$ sobre el mismo conjunto. Es decir si $x^*$ es solución al problema $D(p,z)$, también es solución al problema $D(\lambda p, z)$. La función $\lambda px$ es una transformación lineal positiva de $px$; por lo tanto el problema $\text{mín}_x\{\lambda px | x \succsim z\}$ tiene la misma solución que el problema $\text{mín}_x\{px | x \succsim z\}$.

El segundo resultado sigue del primero (i.e. sigue de $h(p,z) = h(\lambda p, z)$).

2. La demanda Hicksiana por el $k$-ésimo bien es decreciente en $p_k$. Adicionalmente, $e(p,z)$ es creciente en $p_k$.

   **Demostración:**
   Notar que $ph(p,z) \leq ph(p',z)$ para cada $p'$. Esto es porque $h(p',z) \succsim z$ (i.e satisface esta restricción) y la canasta $h(p',z)$ no es menos costosa que $h(p,z)$ a los precios $p$ (porque $ph(p,z)$ es el mínimo gasto). Similarmente, $p'h(p',z) \leq ph(p,z)$. Por lo tanto,

   $$(p'-p)(h(p',z)-h(p,z)) = (p'h(p',z) - p'h(p,z)) + (ph(p,z) - ph(p',z)) \leq 0$$

   y si $(p'-p) = (0,\ldots,\epsilon,\ldots,0)$ (con $\epsilon > 0$), obtenemos que $h_k(p',z) - h_k(p,z) \leq 0$. Por lo tanto, el aumento del precio del bien $k$ tiene un efecto no positivo sobre la demanda hicksiana

   Más aún, si $p'_k \geq p_k$ para todo $k$, entonces $e(p',z) = p'h(p',z) \geq ph(p',z) \geq ph(p,z) = e(p,z)$.

3. $h(p,z) \sim z$.

   **Demostración:**
   Si $h(p,z) \succ z$, entonces por continuidad existiría una canasta más barata al menos tan buena como $z$ en el entorno de $h(p,z)$.

4. $h(p,z)$ y $e(p,z)$ son funciones continuas.

   **Demostración:**
   La continuidad de $h(p,z)$ se puede establecer de una manera análoga a la continuidad de $x(p,w)$. La continuidad de $e(p,z)$ sigue a partir de la continuidad de $h(p,z)$.

5. La función de gasto es cóncava en $p$:

**Demostración:**
Sea $x = h(\lambda p^1 + (1-\lambda)p^2, z)$. Por definición $x \succsim z$.

Por lo tanto, $p^i x \geq p^i h(p^i, z) = e(p^i, z)$ y,
$e(\lambda p^1 + (1-\lambda)p^2, z) = (\lambda p^1 + (1-\lambda)p^2)x \geq \lambda e(p^1, z) + (1-\lambda)e(p^2, z)$.

6. Dual de la Identidad de Roy: El hiperplano $H = \{(p, e) | e = ph(p^*, z)\}$ es tangente al gráfico de la función de gasto en $p^*$.

   Esto sigue de:

   **i** $(p^*, e(p^*, z))$ está en $H$, y

   **ii** $ph(p^*, z) \geq ph(p, z)$, para todo $p^*$.
   El hiperplano $H$ yace sobre un lado del gráfico de la función $e = ph(p, z)$ e intercepta el gráfico en el punto $(p^*, e(p^*, z))$.

7. Dualidad: Decimos que $x^*$ es un equilibrio interno para el consumidor primal si es solución al problema $P(p, x^*)$, i.e. el consumidor no puede obtener una mejor canasta al transar $x^*$ a los precios relativos determinados por $p$. Similarmente, $x^*$ es un equilibrio interno para el consumidor dual si es solución de $D(p, x^*)$, i.e. el consumidor no puede reducir su gasto sin consumir una canasta que sea estrictamente peor que $x^*$.

   Veremos que $x^*$ es un equilibrio interno para el consumidor primal si y solo si es un equilibrio interno para el consumidor dual.

   **Demostración:**
   Asumamos que $x^*$ no es una solución a $D(p, x^*)$. Luego, existe una canasta $x$ estrictamente más barata para la cual $x \succsim x^*$. Para algún vector positivo $\epsilon$ (i.e. $\epsilon_k > 0$ para todo $k$), se sigue cumpliendo que $p(x + \epsilon) < px^*$. Por monotonicidad, $x + \epsilon \succ x \succsim x^*$ lo que contradice el supuesto que $x^*$ es una solución a $P(p, x^*)$.

   Asumamos que $x^*$ no es una solución a $P(p, x^*)$. Luego, existe un $x$ tal que $px \leq px^*$ y $x \succ x^*$. Por continuidad, para algún vector no negativo $\epsilon \neq 0$, $x - \epsilon$ es una canasta tal que $x - \epsilon \succ x^*$ y $p(x - \epsilon) < px^*$ lo que contradice que $x^*$ es una solución a $D(p, x^*)$.

## Referencias


- [Rubinstein, 2012]: Capítulo 6.
- [Mas-Colell et al., 1995]: Capítulo 2, E-F. Capítulo 3 D-G,I-J (aquí el tema está tratado de una manera levemente diferente).

- [Varian, 1984]: para una completa exposición sobre dualidad.
- Roy y Hicks son las fuentes para la mayor parte del material de esta clase. Específicamente, el concepto de función de utilidad indirecta es debido a Roy (1942); el concepto de función de gasto es de Hicks (1946).
- [Kreps, 1990]: 45-63.

# Capítulo 7

# Producción

En este capítulo estudiaremos al productor, un agente económico con la habilidad de transformar un vector de bienes en otro vector. Vamos a preferir usar el término "productor" en lugar de "firma" dado que no estamos preocupados con la organización interna de la actividad del productor. Primero vamos a especificar la "tecnología" del productor y luego discutiremos sus preferencias.

## 7.1. Tecnología

Denotemos los bienes o mercancías, que pueden ser insumos o productos en la actividad productiva del productor, como $1, \ldots, K$. Un vector $z$ en $\mathbb{R}^K$ se interpreta como una combinación en la producción donde los componentes positivos en $z$ son productos y los negativos son insumos. Damos las siguientes definiciones.

**Definición 36** *Un* ***plan de producción*** *es un vector de dimensión* $K$, $(z_1, \ldots, z_K) \in \mathbb{R}^K$*, donde* $z_k > 0$ *denota un producto o output y* $z_k < 0$ *denota un insumo o input. Cuando* $z_k = 0$*, se interpreta como que la mercancía* $k$ *no forma parte del proceso productivo.*

**Definición 37** *El conjunto de elección de un productor es llamado* ***tecnología*** *y refleja las restricciones en el proceso productivo. Esto es, es un proceso que permite transformar unas mercancías (inputs) en otras (outputs).*

**Definición 38** *El* ***conjunto de posibilidades de producción***, $Z \subset \mathbb{R}^K$*, es el conjunto de todos los planes de producción técnicamente viables.*

Las siguientes restricciones son usualmente impuestas sobre el espacio $Z$. Ver figura a continuación.

1. $0 \in Z$: esto se interpreta como que el productor puede permanecer "ocioso" o tiene la posibilidad de suspender la actividad.

2. No existe $z \in Z \cap \mathbb{R}^K_+$ más allá del vector 0 (i.e. no hay producción si no hay recursos, *"No Free Lunch"*).

3. “Free disposal”: esta propiedad nos dice que el productor puede eliminar sin costo las mercancías (inputs o outputs) que tiene en exceso. Formalmente, si $z \in Z$ y $z' \leq z$, entonces $z' \in Z$ (i.e., nada le prohibe al productor ser ineficiente en el sentido de que él puede usar más recursos que los necesarios para producir una cantidad dada de bienes).

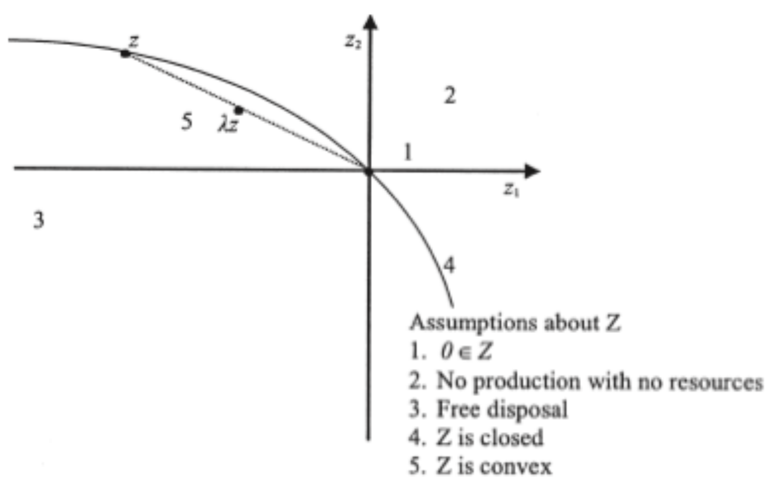
4. $Z$ es un conjunto cerrado.

5. $Z$ es un conjunto convexo. Si $z, z' \in Z$, entonces para todo $\lambda \in [0,1]$, $\lambda z + (1-\lambda)z' \in Z$.

   La convexidad combina varies ideas:

   - Incluye la existencia de productividad marginal decreciente.
   - Perfecta divisibilidad de los planes de producción.
   - Junto con el supuesto que $0 \in Z$, implica rendimientos no crecientes a escala: si $z \in Z$, entonces para todo $\lambda < 1$, $\lambda z \in Z$.

Figura 7.1: Propiedades del Conjunto de Posibilidades de Producción $Z$.




Es importante aclarar lo siguiente:

1. Rendimientos no crecientes a escala: si $z \in Z$, entonces para todo $\lambda < 1$, $\lambda z \in Z$.

2. Rendimientos no decrecientes a escala: si $z \in Z$, entonces para todo $\lambda \geq 1$, $\lambda z \in Z$.

3. Rendimientos constantes a escala: si $z \in Z$, entonces para todo $\lambda \geq 0$, $\lambda z \in Z$.

En algunos casos describiremos las habilidades del productor utilizando una *función de producción*. Consideremos por ejemplo el caso en el cual el bien $K$ se produce a partir de los insumos $1, 2, \ldots, K-1$, esto es, para todo $z \in Z$, $z_K \geq 0$ y para todo $k \neq K$, $z_k \leq 0$.

**Definición 39** *La **función de producción** especifica, para cualquier vector positivo de insumos $v \in R_+^{K-1}$, la máxima cantidad de bien $K$ que puede producirse.*

Si comenzamos con la tecnología $Z$, podemos derivar la función de producción definiendo,

$$f(v) = \text{máx}\{x | (-v, x) \in Z\}.$$

Si comenzamos con la función de producción $f$, podemos derivar la "tecnología" definiendo,

$$Z(f) = \{(-w, x) | x \leq y \text{ y } w \geq v \text{ para algún } y = f(v)\}.$$

Si la función $f$ es creciente, continua y cóncava y satisface el supuesto $f(0) = 0$, entonces $Z(f)$ satisface los supuestos enumerados más arriba.

## 7.2. Comportamiento del Productor

Pensaremos en el productor como un agente que tiene una relación de preferencias sobre el espacio $X$, que contiene todas las combinaciones $(z, \pi)$ donde $z \in Z$ y $\pi$ es un número que representa sus beneficios o ganancias.

Para un vector dado de precios $p$, el productor se enfrenta a un conjunto de elección del tipo $B(p) = \{(z, \pi) | z \in Z \text{ y } \pi = pz\}$.

Un productor racional maximiza una relación de preferencias definida sobre $X$. Dado un vector de precios $p$, él elige $z \in Z$ de manera de maximizar (de acuerdo a sus preferencias) el vector $(z, pz)$.

A continuación daremos algunos ejemplos sobre el comportamiento del productor, que fácilmente pueden ser racionalizados a través de una relación de preferencias sobre el espacio $X$. Para hacer la exposición más clara, nos focalizaremos en el caso en que $K = 2$ donde el bien 1 es el insumo y el bien 2 es el producto y $y = f(a)$ es la función de producción del productor.

1. El productor maximiza la producción de $y$ dada la restricción que $\pi \geq 0$.

2. El productor desea producir al menos $y^*$ unidades. Una vez que ha alcanzado dicha meta, él maximiza beneficios.

3. El productor maximiza beneficios, pero ya emplea $a_1^*$ trabajadores e incurrirá en un costo $c$ por cada trabajador que despide. Por lo tanto, su función de utilidad está dada por $\pi - c\,\text{máx}\{0, a_1^* - a_1\}$.

4. El productor consiste en un grupo de trabajadores que han formado una cooperativa y comparten beneficios de manera igualitaria entre ellos. Por lo tanto, el grupo busca maximizar $\pi/a_1$, i.e., los beneficios por trabajador.

5. Un "productor verde" tendrá preferencias sobre $(\pi, g(z))$ donde $g(z)$ es la cantidad de contaminación, que depende de $z$.

6. El productor maximiza sus beneficios, $\pi$...

Otro ejemplo de comportamiento plausible es maximizar el cociente entre beneficios y costos (esto es, $\frac{\pi}{p_a a}$). No obstante, es importante notar que tal tipo de comportamiento no puede ser representado como la maximización de una relación de preferencias sobre $X$ dado que depende de la asignación de beneficios entre recaudación y costos y no solamente de los beneficios.

Mientras que el supuesto clásico en Economía es que un productor solamente se interesa por beneficios crecientes, los ejemplos mencionados demuestran la riqueza de consideraciones razonables que suelen ser ignoradas al hacer este supuesto.

## 7.3. La función de oferta del productor maximizador de beneficios

Ahora vamos a discutir el comportamiento de un productor que maximiza beneficios. El problema del productor se define de la siguiente manera:

$$\max_{z \in Z} pz.$$

La existencia de una solución única a este problema requiere que hagamos algunos supuestos adicionales, como por ejemplo:

- $Z$ está acotado desde arriba: existe alguna cota $B$ tal que $B \geq z_k$ para cualquier $z \in Z$, y
- $Z$ es estrictamente convexo: si $z, z' \in Z$, entonces la combinación $\lambda z + (1 - \lambda z')$ es un punto interior de $Z$ para cualquier $\lambda \in (0, 1)$.

### 7.3.1. Función de oferta

**Definición 40** *Cuando el problema del productor tiene solución única, la denotamos por $z(p)$ y nos referimos a la relación entre $p$ y $z$ como la* ***función de oferta****.*

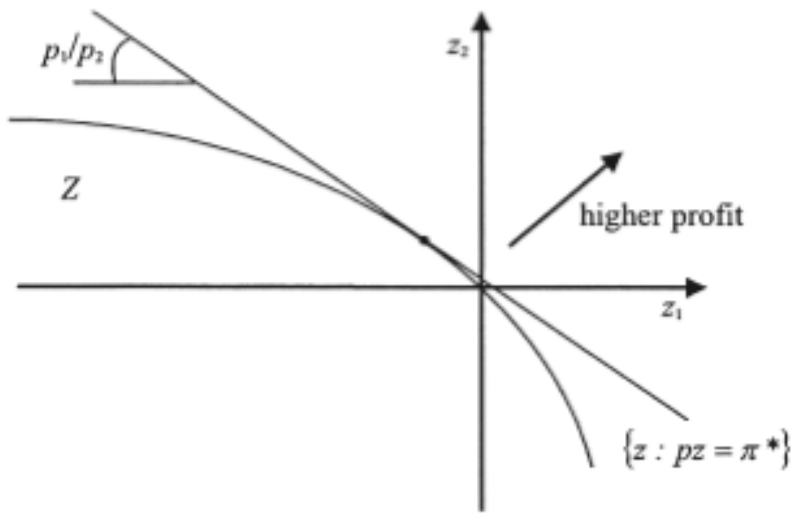
Notar que esta función especifica tanto la oferta de bienes del productor y su demanda por insumos. Damos ahora otra definición importante.

**Definición 41** *La función de beneficios se define como $\pi(p) = \max_{z \in Z} pz$.*

Recordemos que cuando vimos teoría del consumidor, especificamos sus preferencias y describimos su comportamiento como el hecho de hacer una elección a partir de un conjunto presupuestario determinado por los precios. El comportamiento del consumidor (la demanda) determinaba la dependencia de su consumo con respecto a los precios. En el caso de un productor maximizador de beneficios, especificamos una tecnología y describimos su comportamiento como el de maximizar una función de beneficios determinada por los precios. El comportamiento del productor (la oferta) especifica la dependencia del producto y del consumo de insumos con respecto a los precios.

En el caso de un productor maximizador de beneficios, las preferencias son lineales ($pz$) y la restricción está dada por un conjunto convexo ($Z$), mientras que en el modelo del consumidor la restricción es una desigualdad lineal (restricción presupuestaria $px \leq w$) y las preferencias son convexas. La estructura (i.e., continuidad y convexidad) se impone en el conjunto de elección del productor maximizador de beneficios y sobre las preferencias del consumidor, respectivamente en cada caso. Por lo tanto, el problema del productor maximizador de beneficios es muy similar al problema dual del consumidor (ver figura siguiente), en el caso del productor implica la maximización de una función lineal, mientras que en el caso del consumidor implica una minimización.

Figura 7.2: Maximización de beneficios.




A continuación exponemos algunas propiedades de las funciones de oferta y beneficios que son análogas a las vistas en el problema del consumidor dual.

### 7.3.2. Propiedades de la función de oferta

1. $z(\lambda p) = z(p)$, la relación de preferencias (inducida) del productor es idéntica para los vectores de precios $p$ y $\lambda p$, $\lambda > 0$ (i.e. la función de oferta es HG0).

2. $z$ es continua.

3. Asuma que la función de oferta está bien definida. Si $z(p) \neq z(p')$, tenemos que:

$$(p - p')[z(p) - z(p')] = p[z(p) - z(p')] + p'[z(p) - z(p')] > 0.$$

En particular, si (solamente) el $k$-ésimo precio aumenta, entonces $z_k$ aumenta; esto es si $k$ es un producto ($z_k > 0$), la oferta de $k$ aumenta y si $k$ es un insumo ($z_k < 0$), la demanda por $k$ disminuye.

Es importante notar que este resultado, conocido como *la ley de la oferta*, se aplica a la función de oferta estándar (lo que es diferente del caso de la demanda, el cual aplicaba a la función de demanda compensada).

### 7.3.3. Propiedades de la función de beneficios

1. $\pi(\lambda p) = \lambda\pi(p)$, sigue de $z(\lambda p) = z(p)$.

2. $\pi$ es continua , sigue de la continuidad de la función de oferta.

3. $\pi$ es convexa: para cualquier $p, p'$ y $\lambda$, si $z^*$ maximiza $(\lambda p + (1-\lambda)p')z$, entonces $\pi(\lambda p + (1-\lambda)p') = \lambda p z^* + (1-\lambda)p'z^* \leq \lambda\pi(p) + (1-\lambda)\pi(p')$.

4. Lema de Hotelling: para cualquier vector $p^*$, $\pi(p) \geq pz(p^*)$ para todo $p$. Por lo tanto, el hiperplano $\{(p,\pi)|\pi = pz(p^*)\}$ es tangente al gráfico de la función $\pi$ (esto es al conjunto $\{(p,\pi)|\pi = \pi(p)\}$) en el punto $(p^*, \pi(p^*))$. Si $\pi$ es diferenciable, entonces $d\pi/dp_k(p^*) = z_k(p^*)$.

5. A partir del Lema de Hotelling se deduce que si $\pi$ es dos veces continuamente diferenciable, entonces $dz_j/dp_k(p^*) = dz_k/dp_j(p^*)$.

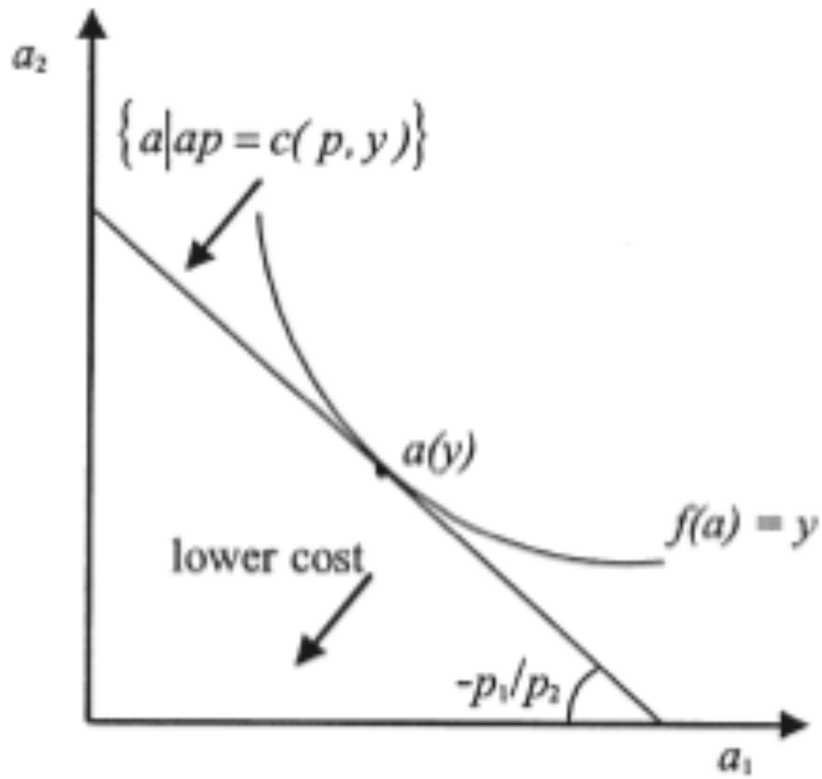
## 7.4. La función de costos

Cuando estamos interesados en el comportamiento del productor solamente en el mercado de productos (y no en el de insumos) podemos representar al productor de una manera reducida por medio de una **función de costos** en lugar de utilizar la tecnología. Para un productor con una tecnología $Z$, donde los bienes $1,\ldots,L$ son insumos y los bienes $L+1,\ldots,K$ son productos, definamos $c(p,y)$ como el costo mínimo asociado a la producción de la combinación $y \in I\!R_+^{K-L}$ dado el vector de precios $p \, in I\!R_{++}^L$ de los insumos $1,\ldots,L$. En otras palabras,

$$c(p,y) = \min_a \{pa|(-a,y) \in Z\}.$$

El siguiente gráfico muestra el problema de minimización de costos.

Figura 7.3: Minimización de costos.



## 7.5. Discusión

Dentro del enfoque económico convencional, permitimos que el consumidor tenga preferencias "generales" pero restringimos los objetivos del productor a la maximización de beneficios. Por lo tanto, un consumidor que consume bienes de manera que destruyen su salud entra en el marco de nuestro análisis, mientras que un productor que se interesa por el bienestar de sus trabajadores o tiene en mente otro objetivo distinto a la maximización de beneficios no entra. Esto es por supuesto algo raro, dado que existen varias alternativas plausibles que puede tener como meta un productor. En particular, una podría ser que el productor quisiera aumentar su producción sujeto a la restricción de no incurrir en una pérdida.

Uno podría preguntarse por qué los objetivos del productor son definidos de manera tan estrecha en relación a las preferencias de los consumidores. Tal vez se debe simplemente a una conveniencia matemática; ciertamente no es el resultado de una postura ideológica conspirativa.

**Referencias**


- [Rubinstein, 2012]: Capítulo 6.
- [Mas-Colell et al., 1995]: Capítulo 5, A-D,G.
- [Kreps, 1990]: Capítulo 8.

# Capítulo 8

# Utilidad Esperada

Veremos ahora como modelar situaciones en las cuales las decisiones se toman en contextos estocásticos. Desarrollaremos solamente los conceptos básicos.

Existen consecuencias inciertas de las acciones de los individuos. En particular podemos hablar de:

1. Elección bajo riesgo: las probabilidades asociadas a los distintos eventos son *objetivas*, es decir existe consenso sobre dichas probabilidades.

2. Elección bajo incertidumbre: las probabilidades asociadas son *subjetivas*, i.e., no hay consenso en la literatura sobre cómo se forman las mismas.

En cualquiera de los dos casos, las probabilidades vienen dadas, es decir, son fijas. Por ahora no haremos la distinción entre los ambientes de elección mencionados.

## 8.1. Loterías

Introducimos la siguiente notación.

- $C$ es el conjunto de consecuencias. Por ejemplo es posible $C = X$. Vamos a suponer que es un conjunto finito, $C = \{c_1, \ldots, c_N\}$.

- $L$ es una lotería, es decir un vector de probabilidades. Formalmente,

  **Definición 42** *Una lotería simple, $L$, es un listado $L = \{p_1, \ldots, p_N\}$ con $p_i \geq 0$ para todo $i$ y $\sum p_i = 1$, donde $p_n$ se interpreta como la probabilidad de que ocurra el resultado $n$.*

- $\mathcal{L}$ es el conjunto de todas las loterías sobre $C$, es decir es la distribución de probabilidades sobre $C$.

Para la representación geométrica se puede utilizar el simplex (que en el caso en que N=3 puede reducirse a un triángulo equilátero), cuyos vértices muestran las loterías degeneradas, es decir los eventos con probabilidad 1.

Para el caso $N = 2$ el simplex se reduce al segmento $[0, 1]$.

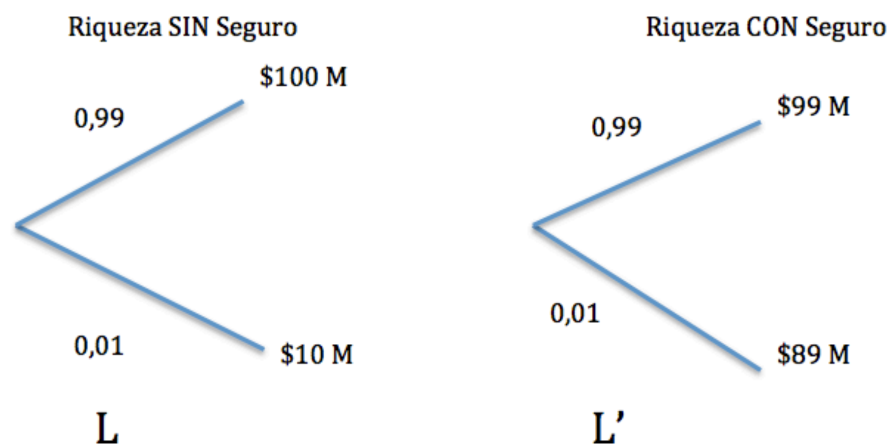
Notar que el objeto de elección o decisión del agente económico es $L$.

**Ejemplo: 2 eventos**

1. Valor de la casa (o mi riqueza) \$100 M (si no se incendia)
2. Valor de la casa (o mi riqueza) \$10 M (si se incendia)

Uno podría comprar un seguro contra incendio. Supongamos que la probabilidad de incendio es 1 %, luego tenemos lo siguiente

Figura 8.1: Loterías Simples.




La prima que hay que pagar es $1 M y en caso de incendio me devuelven 80$ M. Si yo compro el seguro es porque $L' \succsim L$ (aunque no sea cierto que $L'$ sea mejor a $L$ en todos los eventos. Por lo tanto podemos describir este ejemplo de la siguiente manera:

- $C = \{\$10M, \$89M, \$99M, \$100M\}$
- $L = \{0,01; 0; 0; 0,99\}$
- $L' = \{0; 0,01; 0,99; 0\}$

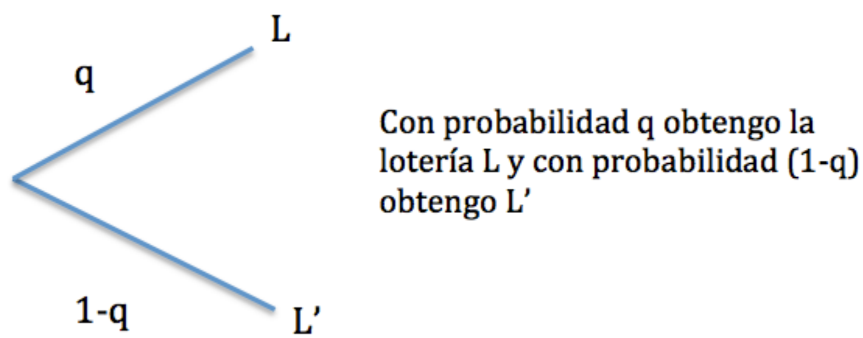
Notar que $C$ es fijo y que como hay 4 consecuencias, entonces cada lotería debe especificar 4 probabilidades.

Necesitamos definir ahora otro concepto importante, el de lotería compuesta que básicamente es aquella cuyas consecuencias son loterías. Formalmente

**Definición 43** *Dadas $K$ loterías simples $L_k = (p_1^k, \ldots, p_N^k)$, para $k = 1, \ldots K$ y probabilidades $\alpha_k \geq 0$ con $\sum_k \alpha_k = 1$, la lotería compuesta $(L_1, \ldots, L_K; \alpha_1, \ldots \alpha_K)$ es la alternativa riesgosa que da como resultado a la lotería simple $L_k$ con probabilidad $\alpha_k$, para $k = 1, \ldots K$.*

**Ejemplo con K=2**

Figura 8.2: Lotería compuesta por dos loterías simples.




## 8.2. Consecuencialismo

Al consumidor solo le importan las consecuencias finales y sus probabilidades. Es una convención que adoptamos para simplificar el análisis. Como se resuelve la incertidumbre no importa. En otras palabras, el proceso por medio del cual se determinan las probabilidades es irrelevante.

**Ejemplo:**

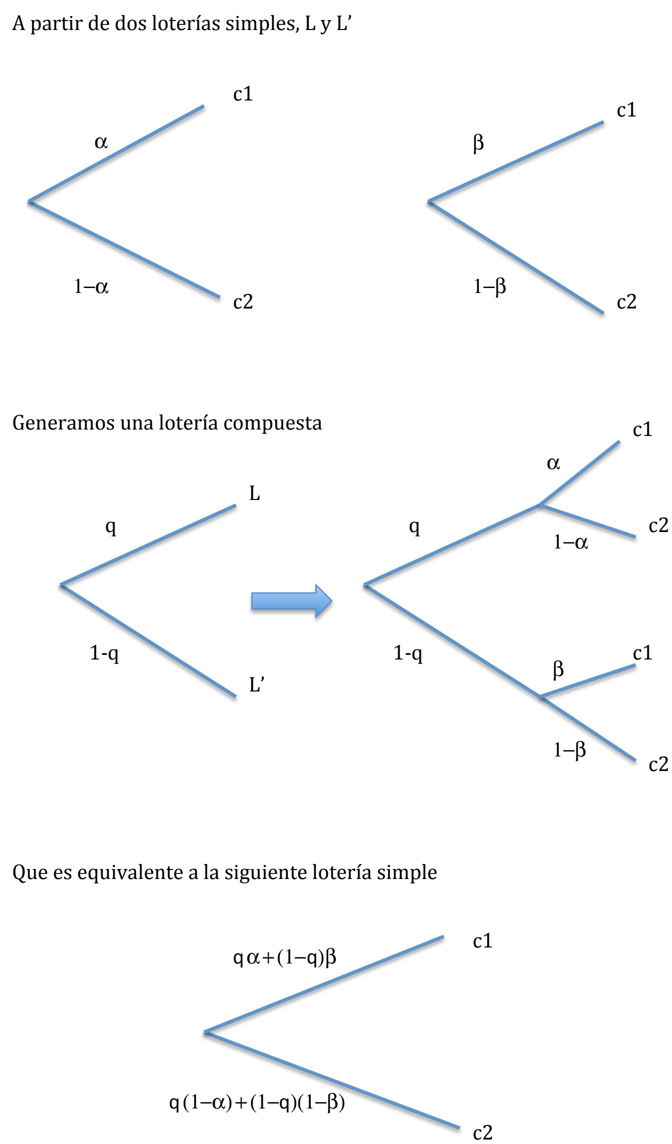
## 8.3. Preferencias del Consumidor

El consumidor posee una relación de preferencias $\succsim$ sobre $\mathcal{L}$. Esta relación de preferencias es completa y transitiva. La pregunta natural que surge es ¿cuándo podemos representar $\succsim$ por medio de una función de utilidad?

La respuesta a esta pregunta es: necesitamos preferencias continuas.

Por otro lado, también nos podemos preguntar si es posible lograr una representación en términos de utilidad que sea sencilla. Por ejemplo, asignar niveles de utilidad a cada consecuencia y luego calcular la utilidad asociada a una lotería como a partir de un promedio ponderando.

Figura 8.3: Consecuencialismo.



**Definición 44** *La función de utilidad $U : \mathcal{L} \to I\!R$, posee la propiedad (o forma) de la utilidad esperada si:*

$$U(\alpha L + (1-\alpha)L') = \alpha U(L) + (1-\alpha)U(L')$$

Notar que el término de la izquierda es la utilidad de la lotería compuesta mientras que cada uno de los términos de la derecha representan el valor esperado de la utilidad de la lotería compuesta (dado por la suma del valor esperado de cada una de las loterías simples). En otras palabras esta representación nos dice que la utilidad de cualquier lotería es igual a la utilidad esperada derivada de las consecuencias.

## 8.4. Dos axiomas fundamentales

Para poder establecer que existe una función de utilidad que representa las preferencias y que tiene la forma de la utilidad esperada, necesitamos dos axiomas.

### 8.4.1. Axioma de Continuidad

Vamos a dar dos definiciones.

**Definición 45** *La relación de preferencias $\succsim$ sobre el espacio de loterías $\mathcal{L}$ es continua si para cada $L, L', L'' \in \mathcal{L}$, los siguientes conjuntos*

$$\{\alpha | \alpha L + (1-\alpha)L' \succsim L''\} \subseteq [0,1]$$
$$\{\alpha | \alpha L + (1-\alpha)L' \precsim L''\} \subseteq [0,1]$$

*son ambos cerrados.*

**Definición 46** *Si $L \succ L'$, entonces existen entornos $B(L)$ de $L$ y $B(L')$ de $L'$ tal que, para todo $\tilde{L} \in B(L)$ y $\tilde{L}' \in B(L')$, $\tilde{L} \succ \tilde{L}'$.*

En palabras, la continuidad significa que las preferencias no cambian abruptamente ante pequeños cambios en las probabilidades.

### 8.4.2. Axioma de Independencia

**Definición 47** *La relación de preferencias $\succsim$ sobre el espacio de loterías $\mathcal{L}$ cumple con el Axioma de Independencia si*

$$L \succsim L' \iff \alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

En palabras, las preferencias sobre $L$ y $L'$ no se ven afectadas por $L''$. Es decir que si se mezclamos dos loterías cualesquiera con una tercera, entonces el orden de preferencias de las dos mezclas resultantes ($L$ con $L''$ y $L'$ con $L''$) no depende (i.e., es independiente) de la tercer lotería utilizada. ($L''$).

Observación: este supuesto puede no cumplirse para el caso en que las consecuencias (la elección del consumidor) estén definidas en el espacio de canastas ($C = X$). La razón es que entre bienes consumidos existen complementariedades que violan la independencia. No obstante, a los efectos de la representación en términos de utilidad, el Axioma de Continuidad es suficiente.

### 8.4.3. Resultado Central

El siguiente teorema debido a John von Neumann y Oskar Morgenstern conocido como el Teorema de von Neumann-Morgensten postula la existencia de una función de utilidad que posee la propiedad de la utilidad esperada que racionaliza las preferencias. En otras palabras la "Hipótesis de la Utilidad Esperada" dice que la racionalidad puede ser modelada como la maximización de un valor esperado, el cual dado el Teorema VNM puede ser resumido como: "racionalidad significa VNM-racionalidad".

**Teorema 1** *Suponga que la relación $\succsim$ satisface los axiomas de Continuidad e Independencia. Entonces, existe una función de utilidad $U : \mathcal{L} \to I\!R$ que posee la propiedad de la utilidad esperada.*

**Referencias**

- [Rubinstein, 2012]: Capítulo 7.
- [Mas-Colell et al., 1995]: Capítulo 6, A-B.

# Bibliografía

Arrow, K. J. y Hahn, F. (1971). *General Competitive Analysis*. San Francisco: Holden Day.

Debreu, G. (1959). *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, volume 17. Yale University Press, 1987.

Fishburn, P. (1970). *Utility Theory for Decision Making*. Number 18. New York: John Wiley and Sons.

Kreps, D. M. (1990). *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton University Press.

Luce, R. D. y Raiffa, H. (1957). *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*. Dover Publications; Reprint edition (April 1, 1989).

Mas-Colell, A., Whinston, M., y Green, J. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press.

Rubinstein, A. (2012). *Lecture notes in microeconomic theory : the economic agent*. Princeton University Press.

Varian, A. (1984). *Microeconomic Analysis*. New York: Norton.