SOBRE EL CÁLCULO FINANCIERO DE EMPRÉSTITOS

Mg. Alejandro R. Bartolomeo
Prof. Titular Cálculo Financiero
y Matemática Financiera
Prof. Titular Inversiones Financieras
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de Cuyo
(2016)

PARTE 1: GENERALIDADES. CLASIFICACIÓN.

Introducción:
La utilización de instrumentos de deuda pública o privada es una práctica frecuente en los mercados financieros de la mayoría de países con cierto desarrollo en este sentido. Desde el punto de vista de nuestra materia, constituye un caso particular de préstamos, siendo aplicables todas las relaciones que se han desarrollado en Sistemas de Amortización. Pero existen peculiaridades muy importantes a tener en cuenta (que implican algunas derivaciones en el planteo de las ecuaciones de cálculo) cuando hablamos de empréstitos. Como se explica en el siguiente punto, la característica de masividad de acreedores y de divisibilidad del préstamo hacen necesario un tratamiento especial desde el punto de vista del Cálculo Financiero.
Es importante destacar que las inversiones financieras (si excluimos instrumentos derivados) suelen dividirse en dos grandes grupos:

a) Inversiones de renta fija: son aquellas en las que las condiciones de reembolso, tasa y plazo están fijadas de antemano. La promesa de flujos de efectivo está específicamente determinada respecto a su monto, momento de pago y forma de reembolso. La característica de fija, no implica rendimientos fijos, necesariamente, (al menos en su negociación secundaria) ya que estos instrumentos están sujetos a las leyes de oferta y demanda del mercado en el que coticen, que será el que defina el precio y por ende el rendimiento a obtener. Este rendimiento puede diferir bastante del determinado en las condiciones de emisión. Los empréstitos que estudiaremos en este capítulo pertenecen a esta clase de inversión.
b) Inversiones de renta variable: los flujos, el momento de su percepción y su forma de percepción, no están determinados de antemano. Los ejemplos clásicos de este tipo de instrumentos son las acciones. Tienen un vencimiento indefinido y su renta se percibe en la forma de dividendos.

1.1 Qué son los empréstitos? Concepto y sujetos. Elementos característicos.

De acuerdo al diccionario de la Lengua Española (Diccionario de Uso del Español de América Vox © Larousse), el significado de la palabra empréstito es:

EMPRÉSTITO: 1- Préstamo que un particular concede al Estado, a un organismo oficial o a una empresa, y que se materializa en bonos, cédulas, pagarés, obligaciones, etc. 2- Cantidad de dinero así prestada.

Como vemos existe una persona que en rigor, puede ser un "particular" o bien una persona jurídica a las que llamaremos ***tomadores*** que prestan una cantidad de dinero a otra persona, que usualmente es el Estado (Nacional, Provincial o Municipal) pero que también pueden ser empresas, generalmente Sociedades Anónimas. Esta contraparte es el ***emisor*** del empréstito.

A cambio del préstamo de dinero, el emisor del empréstito entrega bonos, cédulas, pagarés. Todas estas denominaciones constituyen los instrumentos en los que se plasma cada uno de los préstamos que asume el emisor con los tomadores. A cada una de estas partes del empréstito las llamaremos ***obligaciones***. La principal característica de estas obligaciones es que son ***negociables*** en los mercados de valores. La negociabilidad permite al emisor tomar grandes cantidades de dinero en el mercado (emisiones masivas de obligaciones) y que el tomador no tenga que esperar al vencimiento del plazo de la obligación para recuperar su dinero, ya que tiene la posibilidad de negociar el valor en el mercado en caso de que lo estime pertinente.

Pero podríamos preguntarnos por qué los empréstitos necesitan un estudio especial, si no constituyen mas que un sistema de amortización de deudas y por ende, toda la teoría ya escrita (y en el caso de nuestro curso ya estudiada) debería ser fácilmente aplicable. Esto en parte es verdad, ya que una vez definida la forma de reembolso del empréstito (ya sea reembolso global o reembolso a la manera del sistema alemán u otra que se nos ocurra), tendríamos allanado el camino. Pero, como algo ya adelantáramos, los empréstitos tienen características peculiares que los diferencian de un sistema de amortización común y por lo tanto nos obligan a realizar un tratamiento especial.

Resumamos cuáles son estas características especiales:

a) ***Masividad de acreedores (los tomadores)*** el préstamo se emite con numerosos acreedores, a diferencia de lo que suele ocurrir con un préstamo común otorgado por una Entidad Financiera, donde la entidad enfrenta a varios deudores. Los acreedores no están individualizados por el deudor, ya que los títulos u obligaciones están destinados a negociarse en los mercados de capitales.
b) ***Plazos:*** generalmente los plazos de vencimiento de las obligaciones son largos. Podría citarse a modo de ejemplo, que hay obligaciones en el mercado cuyo plazo oscila entre 1 y 30 años.
c) ***Monto elevado:*** la deuda total contraída por el emisor es de un monto muy significativo. Esta es una de las razones por las que el empréstito se divide en obligaciones que se

podrán transar libremente en el Mercado de Capitales. Esto nos lleva a otra caracterización importante:

d) ***divisibilidad:*** los empréstitos, al tener numerosos acreedores, deberán ser divididos en un numero determinado de obligaciones, de un determinado valor nominal (C_0).
e) ***El deudor tiene una característica especial:*** es una institución del Estado Nacional, Provincial o Municipal o una persona jurídica de derecho privado (empresas o corporaciones). En este sentido, puede hacerse referencia a su marco legal, por lo que podemos distinguir:
    a. Deuda Pública: normado por la Ley de Administración Financiera y de los Sistemas de Control del Sector Público (ley 24.156; modif. y complementarias). En su art. 57 inc a), establece que el endeudamiento que resulte de las operaciones de crédito público se denominará deuda pública y puede originarse entre otras cosas, en la emisión y colocación de títulos, bonos u obligaciones de largo y mediano plazo, constitutivos de un empréstito. También existen marcos legales específicos para la Deuda Pública provincial y municipal.
    b. Deuda Privada: regido por la ley 23.576 (modificatorias y complementarias) llamada Ley de Obligaciones Negociables.

1.2 Clasificación de los empréstitos:

Existen infinidades de clasificaciones atendiendo a las distintas características de los empréstitos. Solo enunciaremos aquellas que consideramos sustanciales a los efectos de su estudio y que serán utilizadas en el desarrollo del presente trabajo a los efectos de cubrir todos los aspectos que consideramos pertinentes en el desarrollo de nuestra propuesta. Podríamos distinguir:

a) ***Por su forma de reembolso***. En este caso tendremos en cuenta cómo devuelven el capital o principal:

    i. Bonos cupón cero, o títulos de descuento. Pagan al vencimiento tanto el capital como la renta, pero de una forma particular, ya que no tienen cupón de renta o de amortización. Por ello, es que se colocan con un descuento. Al vencimiento pagan su nominal. La diferencia entre el valor con descuento y el nominal del título constituye su renta. Al vencimiento reembolsan el 100% del valor nominal de emisión. Ejemplos de esto bonos son los US Treasury STRIPS (Separate Trading of Registered

Interest and Principal Securities) o las LETES del gobierno argentino o LEBAC del Banco Central de la República Argentina.

ii. Rescate Global con pago periódico de intereses (RGCPPI): también llamados de tipo bullet, los intereses se pagan periódicamente, mientras que el principal se reembolsa en forma integra al final del último período de vigencia del empréstito. Por lo tanto, si el empréstito tiene una vigencia de n períodos, el último desembolso será:

$$S_n = Vi + V$$

Como se menciona más adelante, en algunos mercados, también existen aquellos en los que se capitalizan todos los intereses devengados y se pagan junto con el capital al final del empréstito.

iii. Rescate periódico constante (RPC): el capital se reembolsa en partes iguales. Esta opción se identifica con el sistema alemán de amortización. Por lo tanto, cada reembolso de amortización será:

$$t = \frac{V}{n}$$

iv. Rescate periódico progresivo: en esta modalidad, los desembolsos totales para el emisor son constantes, lo que da lugar a rescates de capital necesariamente crecientes a la manera del sistema francés de amortización. Es bastante poco común su implementación en la actualidad.

Todos los empréstitos estudiados en este trabajo se basan en las modalidades detalladas en ii) y iii), ya que son las más comunes y ofrecen alguna dificultad en el cálculos de precios y rendimientos. Los demás modos no se detallan, por simpleza en el cálculo o por haber caído en desuso.

b) ***Por la forma de pago de los intereses.***

i. Pago periódico de intereses: es decir aquellos en los que el interés se paga periódicamente (es decir que se extingue la obligación periódica de los intereses al final de cada período)
ii. Con capitalización de intereses: éstos pasan a formar parte del saldo de deuda al final de cada período. Obviamente también existen alternativas

intermedias, en donde parte de los intereses devengados por la obligación se cancelan y parte se capitalizan pasando a formar parte de la nueva deuda. Ejemplo de esta solución intermedia son algunos de los títulos emitidos por la Argentina en canje de la deuda pública en el año 2003, en donde en algunas de las especies emitidas tanto en pesos como en moneda extranjera, parte del cupón de intereses pasa a formar parte de la deuda y parte se paga como servicio al final del período.

iii. Bonos cupón cero (o Zero Cupon Bond). Detallado en a.i)

c) ***Por la coincidencia o no de la fecha inicial de la renta con la fecha de valuación: inmediatos o diferidos.*** Esta característica es especialmente relevante en bonos con ***rescates periódicos***. Recordemos que la fecha inicial de la renta es el inicio del primer período correspondiente a la serie de prestaciones y la fecha de valuación es el momento elegido donde se valúan el conjunto de prestaciones, pudiendo coincidir o no con aquella. Si existe coincidencia de ambas fechas, podemos afirmar que la renta es inmediata. Si la fecha de valuación es anterior a la de inicio de la renta, la renta es diferida. Es muy común que exista un período de gracia durante el cual no se realicen reembolsos de capital y los intereses se paguen o se capitalicen (tal cual los hemos descripto en el punto b). Es posible que el conjunto de prestaciones tengan que valuarse al inicio (momento 0) y en este caso surgen dos conceptos que es necesario distinguir: plazo de gracia y diferimiento.

i. Plazo de gracia: cantidad de períodos que hay entre el momento cero (o momento de suscripción) y ***el primer pago de amortización (o primer reembolso de capital).***

ii. Diferimiento: al plazo de gracia hay que restarle un período (medido según la periodicidad de las amortizaciones de capital) para poder valuar la renta de los desembolsos como vencida.

iii. Veamos un ejemplo: un empréstito se reembolsa en 5 años, 1/5 de V cada año, teniendo lugar el primer reembolso a los tres años de emitido. El plazo de gracia según lo definido con anterioridad es de 3 años, mientras que el diferimiento es de 2 años. Esta distinción tiene alguna importancia en la valuación del conjunto de servicios o bien en el valor actual del conjunto de amortizaciones (nuda propiedad) como veremos más adelante.

d) ***Por la coincidencia o no del servicio de interés con el de amortización.*** Existen empréstitos en los que los servicios de intereses siempre coinciden con los servicios de amortización (también llamados rentas sincrónicas). El otro tipo posible, según esta característica es que no siempre exista coincidencia en el pago de intereses y el de amortizaciones (también denominadas rentas asincrónicas). Veamos un ejemplo de asincronismo: supongamos un empréstito de 5 años de duración, con reembolso de capital en partes iguales anualmente. Pero supongamos que el interés se paga semestralmente. Además supongamos que el primer pago de amortización es al año de emitido el empréstito. Su diagrama unidimensional consistiría en :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y_1	y_1	y_2	y_2	y_3	y_3	y_4	y_4	y_5	y_5
		t		t		t		t		t

Como vemos, en el ejemplo, los servicios en los que existe coincidencia de pago de amortización y de interés son los servicios pares. Esto es así porque cada 2 servicios de interés se pagará uno de amortización. Si bien las amortizaciones son 5, el número total de servicios será n=5x2=10

e) ***Según el plan de reembolso:*** pueden ser empréstitos con ***obligaciones enteras o fraccionadas***. En el primer caso, tanto para la colocación como para el rescate, la obligación es considerada como una unidad indivisible, Esto necesariamente se da en el caso de los empréstitos con rescate global. Pero también podría darse cuando exista rescate periódico, ya sea a la manera del sistema alemán o a la manera del sistema francés de amortización, ambos desde el punto de vista del emisor. Desde el punto de vista del tomador, el rescate de una obligación entera siempre será global, ya que la obligación se rescata como un todo indivisible, más allá de que la suma de todos los servicios rescatados impliquen desde la vista del emisor un rescate periódico constante o progresivo. Las ***obligaciones fraccionadas*** son aquellas que se dividen en fracciones del mismo valor, por lo que cada una es la enésima parte del valor nominal, si el plan prevé n rescates periódicos. El tipo de rescate para estas obligaciones es a la manera del sistema alemán, es decir rescate periódico constante, al ser las porciones de la obligación todas iguales.

Teniendo en cuenta las clasificaciones enunciadas, y a los efectos del curso de Matemática Financiera que dictamos, los empréstitos que estudiaremos en este trabajo tendrán las siguientes características: podrán tener rescate global o rescate periódico constante, desechando el rescate periódico progresivo. El pago de los intereses siempre será periódico (por lo que no estudiaremos en este trabajo los que capitalizan intereses). Podrá haber empréstitos con o sin plazo de gracia (es decir diferidos o inmediatos), con pagos de intereses coincidentes o no. Las obligaciones podrán ser enteras o fraccionadas y asociaremos las obligaciones enteras al rescate global y las fraccionadas al rescate periódico constante.

1.3 El punto de vista del emisor y del tomador.

Si nos centramos en la multiplicidad de acreedores y por ende de obligaciones, vemos que el flujo de ingresos y egresos que produce un empréstito, puede ser muy diferente, dependiendo del punto de vista que utilicemos: emisor o tomador.
Si nos ubicamos desde el punto de vista del ***emisor***, los flujos de fondos "agregados" siguen un camino idéntico al sistema de amortización al que responda el empréstito. Dicho de otro modo y más allá de algunas modalidades características de los empréstitos que estudiaremos más adelante (suscripción no a la par y rescate no a la par), la descripción de los flujos de ingresos y egresos del empréstito puede hacerse a través de las fórmulas que ya conocemos del sistema de amortización al que responda. Pero existen casos en los que la determinación del punto de vista desde el cual vemos el empréstito (emisor o tomador) representa un distinción importante, respecto a los flujos que produce y por ende tendrá influencia en los cálculos de valores (compra, venta, suscripción) y rendimientos. Supongamos por ejemplo un empréstito con reembolso periódico constante en 10 años al 3%, por un total de 1.000.000 de pesos con 1000 obligaciones fraccionables. Desde el punto de vista del emisor, ***que abarca toda la duración del empréstito,*** la distribución de los flujos es exactamente igual que la de un sistema de amortización alemán en 10 cuotas. En este caso en particular, incluso su servicio total S_k podría calcularse aplicando la fórmula de una cuota cualquiera de un sistema alemán. Es decir:

$$S_k = \frac{V}{n}\left[1+(n-k+1)i\right]$$

Calculemos entonces la cuota que deberá desembolsar el emisor del empréstito de nuestro ejemplo al final del período 4:

$$S_4 = \frac{1.000.000}{10}\left[1+(10-4+1)0{,}03\right] = 100.000 \text{x} 1{,}21 = 1.210.000$$

Qué pasa con los flujos, desde el punto de vista del tomador?. Evidentemente, como el empréstito tiene 1.000 obligaciones, cada uno de los flujos ***a lo largo de todo el empréstito*** será igual a los que determinemos desde el punto de vista del emisor, pero divididos por mil. Pero existen casos particulares en los que los flujos desde el punto de vista del tomador no son proporcionales a los del emisor. Supongamos que un tomador del empréstito de nuestro ejemplo vende la obligación en el período 4 a 980 pesos. Obviamente, el flujo producido en el período cuatro será lo que se obtenga en el mercado por la venta de la obligación y nada tiene que ver con la amortización que hace el emisor del empréstito. Si comparamos en un cuadro, una obligación que ha sido amortizada "naturalmente" (es decir de acuerdo a sus condiciones de emisión, teniéndola en este caso durante los 10 años de plazo del empréstito) con una vendida en el período 4, la distribución de flujos sería la siguiente:

Período	Amortización Natural	Venta en k=4
0	-1000	-1000
1	130	130
2	127	127
3	124	124
4	121	980
5	118	0
6	115	0
7	112	0
8	109	0
9	106	0
10	103	0

Como vemos, la diferencia se produce en el momento de la venta para el segundo tomador. Esto traerá como consecuencia, como veremos más adelante, diferencias fundamentales en los cálculos de los rendimientos, que no serán ya los nominales o contractuales, sino que dependerán del valor que se obtenga en la negociación bursátil si la obligación ha sido transada en el mercado correspondiente.

PARTE II: SUSCRIPCIÓN Y RESCATE NO A LA PAR

Existen modalidades que permiten adaptar los empréstitos a las condiciones existentes en el mercado en el momento de su colocación o rescate. Existen, entonces, características que permiten ofrecer rendimientos más acordes a los reinantes en el mercado en un momento determinado, ya sea ese el momento de su emisión o el momento de su rescate. En general, entonces, podría hablarse de dos modalidades posibles, al menos teóricamente:

a)suscripción no a la par y
b)rescate no a la par.

Como hemos visto, los empréstitos tienen un valor nominal que según el punto de vista que elijamos será: el monto por el cual el emisor toma la obligación (V_0) por un lado o bien el valor de cada obligación si lo miramos con la perspectiva del tomador (C_0). También tienen un tasa nominal o contractual, fijada en las normas de emisión (llamada tasa "i"). Estas condiciones, están fijadas en las normas de emisión del empréstito, ya sea una ley, un decreto que la reglamente, una norma de un Banco Central o las condiciones de emisión de una obligación negociable. Si tenemos en cuenta que las condiciones de emisión y de rescate (tasa de interés, forma de reembolso, importe del rescate, importe nominal de cada obligación) están fijadas en dichas normas y que por razones de mercado (por ejemplo un cambio de la tasa de rendimiento que el mercado requiere para bonos de similar riesgo al emitido) es necesario modificarlas, para hacerlas más atractivas, tenemos que recurrir a un procedimiento que permita modificarlas sin tener que cambiar las normas de emisión insertas en el instrumento legal. La forma de hacer esto de un modo práctico es generalmente a través de la suscripción no a la par. Más extraordinaria es la aplicación del rescate no a la par, como veremos más adelante.
Pero esta no es la única razón por la que estudiamos estas dos modalidades. Toda la casuística comprendida en las operaciones de compra y venta en el mercado de un título representativo de un empréstito pueden explicarse a través del mismo planteo de suscripción y/o rescate no a la par, cambiando las fechas de valuación o realizando una adecuada combinación de ambas modalidades.

Suscripción no a la par

El hecho de que exista en el origen del empréstito un importe a suscribir distinto del nominal (ya sea teniendo en cuenta el total de deuda o bien a nivel de cada obligación), obviamente hacer surgir un “valor efectivo” distinto del nominal. Lo más común es que este valor esté bajo la par, es decir que el valor efectivo o que realmente aportará cada uno de los tomadores de las obligaciones del empréstito será menor que su nominal. Obviamente esta figura se utiliza en la emisión de empréstitos, para mejorar el rendimiento, de modo que el empréstito se adapte a las condiciones cambiantes del mercado por las variaciones que se hayan producido en éste en toda la etapa de su instrumentación. Al existir un nominal y un valor efectivo diferentes, surgirá una tasa de interés “efectiva” (simbolizada con i’). Para poder calcular valores efectivos o tasas efectivas, utilizaremos las herramientas que nos acerca la Teoría de Valuación de Deudas (capítulo 4) ya presentada.

Recordemos qué elementos nos da esta teoría para el cálculo de valores efectivos o tasas efectivas.[1]

a) Fórmula de Makeham: nos permite determinar el valor efectivo de una deuda en un momento cualquiera (siempre período entero) de la duración del empréstito. En el caso particular de la suscripción no a la par, la fecha de valuación será el momento 0 (o de emisión del empréstito). Recordemos que, desde el punto de vista del emisor del empréstito podríamos decir:

$$V_0 = \frac{i}{i'} V_0 + \left(1 - \frac{i}{i'}\right) K_0 \qquad (1)$$

Donde:

$V_0 =$ Valor de suscripción del empréstito (valuación al momento 0)

$i =$ tasa de interés nominal o contractual del empréstito

$i' =$ tasa efectiva o de rendimiento del empréstito ante la posibilidad de que exista un determinado valor de suscripción (o valor efectivo) distinto del nominal

$K_0 =$ nuda propiedad (valor actual de las partes de capital de los reembolsos del empréstito, valuados en el momento 0)

b) En caso de ser necesaria la determinación de la tasa de rendimiento dado un valor de suscripción, es posible establecer un sistema de dos ecuaciones y a través del método iterativo estudiado en Valuación de deudas, determinar la tasa i’:

Si despejamos de (1) la tasa de interés,:

[1] Como veremos luego, también es aplicable la Teoría de la Inversión. La utilizaremos más extensamente en la valuación de compra o venta de obligaciones (parte 3 de este capítulo).

Multiplicamos (1) por i' y aplicamos distributiva en el segundo término del segundo miembro:

$$V'_0\, i' = iV_0 + K_0 i' - K_0 i$$

Agrupando y despejando i':

$$V'_0\, i' - K_0 i' = iV_0 - K_0 i$$

$$i' = \frac{V_0 - K_0}{V'_0 - K_0}\, i$$

Usando esta fórmula, combinada con la nuda propiedad en forma explícita, a partir de un valor de i' relativamente arbitrario, y por un proceso de iteración entre las dos expresiones, podremos determinar la tasa de rendimiento para una suscripción no a la par, ya sea del empréstito (valores de V_0) o para una sola obligación (a la que llamaremos C'_0)

$$\begin{cases} i' = \dfrac{V_0 - K_0}{V'_0 - K_0}\, i & (2) \\ \\ K_0 : \text{explicitar\_nuda\_propiedad\_según\_forma\_de\_reembolso} \end{cases}$$

No olvidemos también la posibilidad de utilizar el Método de Newton ya aprendido y utilizado en rentas y sistemas de amortización, para el cálculo de la tasa de interés necesaria para valuar una serie de flujos. Si bien en esta parte no haremos uso de este método, si lo utilizaremos extensivamente en la parte siguiente, cuando se trate la negociación de las obligaciones en el mercado, para los casos en que se desee la determinación de la tasa de interés o rendimiento de una operación de compra o venta de una obligación en el mercado correspondiente.

Ejemplos de determinación del valor de suscripción de un empréstito o de una obligación, dado un rendimiento deseado:

Antes de resolver el ejemplo, cabe darle relevancia a algunos conceptos ya mencionados.

En primer lugar, recordemos que los períodos del empréstito son los períodos elegidos, según las normas de emisión, ***para el pago de la renta de dicho empréstito***. Pueden coincidir o no con los de amortización. Por ejemplo, un empréstito puede tener 10 años de duración, pero si paga sus rentas trimestralmente, la cantidad de períodos (n) será de 40 (n= m.p = 10 x 4 = 40).[2]

También debemos recordar el concepto de plazo de gracia: es el plazo que va desde la emisión del empréstito hasta el momento que se produzca la primera amortización. Se mide, como es de suponer, de acuerdo a la periodicidad del empréstito antes explicada. Es necesario subrayar que el plazo de gracia también forma parte de la cantidad de períodos del empréstito. Siguiendo con el ejemplo del párrafo anterior, si este empréstito tuviera además un plazo de gracia (pg) de dos años (en rigor 8 trimestres), el total de períodos sería:

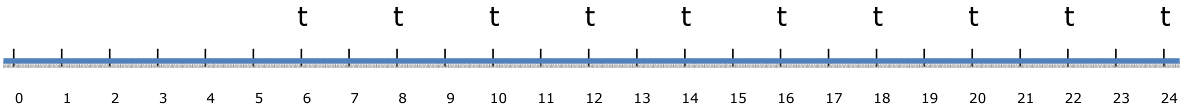
$$n = pg + m.p = 2 \times 4 + 10 \times 4 = 48$$

Recordemos, entonces que los períodos del empréstito siempre se deben medir en función de la periodicidad de la renta, por lo cual, para este caso particular lo mediremos en trimestres, resultando un total de 48 períodos trimestrales.

Vayamos ahora al ejemplo de aplicación:

Ejemplo 2.1: para aplicar la fórmula (1), supongamos un empréstito de 100.000.000 de pesos con 1000 pesos de valor nominal por obligación, que se emite con 10 amortizaciones anuales, tres años de plazo de gracia y pago semestral de intereses al 5% semestral. Determinar el valor de suscripción del empréstito para que rinda el 6,2 semestral a quienes vayan a suscribirlo. Recordemos que por tener que determinar el valor de suscripción, deberemos valuar en el momento 0. Si cambiáramos al punto de vista del tomador, podemos deducir que una fórmula muy similar podría usarse para el caso de que una persona "compre" en algún momento distinto del de emisión del empréstito. Lo único que cambiaría sería la fecha de valuación, siempre y cuando la obligación se conservara hasta su total extinción. Esta particularidad se verá en la parte tres de este capítulo, pero con un enfoque algo distinto al planteado hasta ahora.
Planteemos pues la determinación de nuestro valor de suscripción para el ejemplo ayudándonos con el diagrama unidimensional:

[2] La simbología utilizada (m; p; n; pg; etc;) y la descripción de su significado, está incluida al final del capítulo, en un apéndice.



$$V'_0 = \frac{0{,}05}{0{,}062}100.000.000 + \left(1 - \frac{0{,}05}{0{,}062}\right)\frac{100.000.000}{10}\alpha\frac{1{,}062^2 - 1}{10}\Big|\,1{,}062^{-4} =$$
$$= 80.645.161{,}30 + 8.328.036{,}30 = 88.973.197{,}62$$

Desde el punto de vista del emisor, si emitimos un empréstito de 100.000.000 pero aceptamos recibir por él efectivamente 88.973.197,62, estaremos pagando un costo financiero de 6,2% en vez del 5% contractual, por haber permitido la suscripción bajo la par. Desde el punto de vista del tomador, podríamos decir que por cada obligación de valor nominal 1000, cada suscriptor deberá aportar 889,73; de modo que la tasa de rendimiento de la inversión, si la obligación es mantenida en cartera hasta su extinción natural, (período 24) sea del 6,2% semestral.

Podríamos hacer el proceso inverso: ***ejemplo 2.2***: cuál sería la tasa de rendimiento de un empréstito si se suscribió al 88,973197% y se tiene hasta su extinción total. Esta vez, plantearemos los valores para una obligación, ubicándonos desde el punto de vista del tomador. Usamos las ecuaciones detalladas en (2) pero adaptadas al tomador, es decir:

$$i' = \frac{C_0 - K_0}{C'_0 - K_0}\, i$$

La nuda propiedad en este caso es análoga a la usada en lo fórmula de Makeham del punto anterior, es decir:

$$K_0 = \frac{1000}{10}\alpha\frac{(1+i')^2 - 1}{10}\Big|(1+i')^{-4}$$

Incorporando la ecuación de i' nos queda:

$$\begin{cases} i' = \dfrac{1000 - K_0}{889{,}73197 - K_0}0{,}05 \\[2ex] K_0 = \dfrac{1000}{10}\alpha\dfrac{(1+i')^2 - 1}{10}\Big|(1+i')^{-4} \end{cases}$$

Recordemos que iniciamos las iteraciones con una tasa i_0, que creemos, cercana a la solución final. Para este caso en particular utilizaremos la tasa nominal o contractual del empréstito; i_0=0,05

IT	i'	Ko
0	0,0500	500,13
1	0,0642	419,08
2	0,0617	431,80
3	0,0620	430,07
4	0,0620	430,31
5	0,0620	

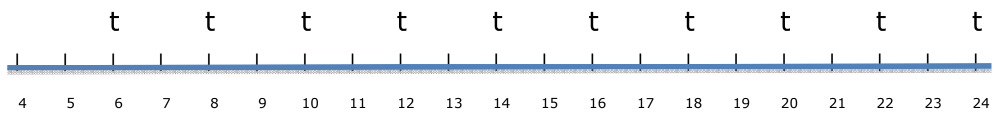
Como podemos apreciar en el cuadro, la tasa de rendimiento a la que arribamos si por cada obligación se pagó 889,73 es del 6,2%, que era la tasa de rendimiento desde el punto de vista del emisor en el ejemplo anterior.

No es la única metodología existente para determinar la tasa de interés. También, recurriendo nuevamente al cálculo numérico podríamos encontrar la tasa a través del Método de Newton, ya estudiado. Este método será utilizado en la parte tres de este capítulo, en donde plantearemos los rendimientos de una obligación dados ciertos valores de compra y/o venta en el mercado.

Como decíamos con anterioridad, la determinación del valor de suscripción de una obligación para un cierto rendimiento deseado o bien la de la tasa dado un valor de suscripción de una obligación es aplicable casi inmediatamente a las compras de obligaciones, ya que la suscripción es un caso especial de compra, en donde el momento de la operación (y por ende toda su valuación) es el mismo que el de emisión del empréstito. Pero podría ocurrir que un empréstito se comprara en algún momento de su vigencia, supongamos en el período “v”. Esta operación no es mas que una “suscripción especial”, en v, de un empréstito de n-v períodos. Todas las valuaciones que para el caso de suscripción se hicieron en 0, se deberían plantear ahora en el mismo momento de la compra, es decir en “v”. La determinación del precio de compra de una obligación del ejemplo 2.1, hecha en el momento 4 (v=4) para que rinda el 6,2% sería:

$$C'_4 = \frac{0,05}{0,062}1.000 + \left(1 - \frac{0,05}{0,062}\right)\frac{1.000}{10}\alpha\frac{1,062^2 - 1}{10}$$

Las diferencias con lo que planteáramos en el ejemplo 2.1, están dadas principalmente por el distinto punto de vista (ahora del tomador) y la diferente fecha de valuación (antes era en el momento de la suscripción y ahora es en v=4). Como vemos el V_k del ejemplo anterior ahora es C_k=1.000. Además el reembolso de capital de cada obligación fraccionada es de 100 pesos (1.000/10). Otro aspecto diferencial es el diferimiento de la renta de cuotas de capital, que acá, por valuarse en 4, desaparece, por no ser necesario, ya que la renta anual de las partes de capital se transforma en inmediata en vez de diferida. Si hacemos un diagrama unidimensional de los flujos involucrados en este ejemplo de compra en v=4, tenemos:



Rescate no a la par

Otra modalidad para producir rendimientos diferentes a la tasa contractual de un empréstito es el rescate no a la par. Desde un punto estrictamente contractual, no sería posible devolver un valor mayor o menor al comprometido originalmente y por esto podríamos pensar que este método no es de utilidad. No obstante esto, existen algunas situaciones que podrían asimilarse perfectamente a un rescate no a la par, ya sea por encima o por debajo del nominal. Traigamos dos ejemplos claros, extraídos de la realidad. Un ejemplo de rescate sobre la par sería algún tipo de empréstito en el que se determinaran en el momento de rescate premios adicionales al valor nominal cuya entrega se decidiera por sorteo, para quienes fueren favorecidos. El ejemplo de rescate bajo la par típico, es el canje de deuda en default realizado por el Estado Argentino en el año 2003 y sus derivaciones.

Más allá de estas situaciones en donde efectivamente se produce un rescate no a la par por ciertas circunstancias que podríamos calificar como extraordinarias, existen ciertas situaciones en las que el rescate no a la par se produce de hecho. Es el típico caso de la venta de una obligación. Para el tomador, esta situación constituye un rescate no a la par, que dependerá de las condiciones imperantes en el mercado en el momento de vender su obligación.

Por lo tanto, el estudio de esta modalidad es necesario para poder abordar los casos especificados de rescate, más allá de que sea rara como una condición de rescate natural del empréstito.

Tal cual lo hiciéramos en el caso de suscripción no a la par, es necesario distinguir:

a) determinación del valor de rescate para que produzca un cierto rendimiento deseado
b) determinación de la tasa de rendimiento que produce un cierto valor de rescate

Las herramientas de cálculo que utilizaremos para resolver este problema serán las impartidas en la Teoría de la Inversión, de las que haremos uso extensivo en la próxima parte también. Podríamos ir adelantando las nociones que utilizaremos en la parte tres de este capítulo para la compra y venta de obligaciones en el mercado. Tomemos de dicha teoría la parte que nos interesa. Es decir, buscamos una fecha de valuación, que será la de emisión del empréstito con rescate no a la par. A esa fecha se valuarán todas las prestaciones, algunas con signo positivo y otras con signo negativo, según representen un flujo de entrada o "ingreso en sentido financiero" o un flujo de salida o egreso. Si miramos al empréstito desde el punto de vista del tomador, podríamos detallar que dentro de las prestaciones con signo positivo se encuentran todos los servicios del empréstito, es decir los servicios de intereses o renta del empréstito y los que correspondan a reembolso de capital (o amortización). En especial, dentro de estos flujos se considerará también el valor de rescate (distinto del nominal, es decir no a la par). Como egresos de fondos, deberemos considerar los flujos negativos que implicaron una inversión o salida de fondos del tomador del empréstito. Generalmente se producen al inicio y coinciden con la fecha de valuación. Vale la pena recalcar, siempre desde el punto de vista del tomador, que existen ciertas circunstancias que implican un rescate no a la par, más allá de que no fueran una condición impuesta por el emisor del empréstito. La venta de una obligación implica casi siempre un rescate no a la par. Pero de esto nos ocuparemos en la siguiente parte.

Si miramos los flujos desde el punto de vista del tomador, la idea es análoga pero con una gran diferencia: los ingresos del tomador serán egresos para el emisor (intereses y/o amortizaciones) y los egresos para el tomador (valor de suscripción o precio de compra en el mercado en su caso) serán negativos para quien compra o suscriba pero positivos para quien emita el empréstito.
Si bien en primera instancia esto puede parecer confuso y poco pedagógico, no debemos perder de vista que la valuación la haremos con la siguiente ecuación (reconfigurada de acuerdo a todos los elementos utilizados en el rescate no a la par):

$$VAC=VAB$$

Si siempre el valor actual de los costos los ponemos en un miembro de la ecuación, deberemos poner en el otro miembro el valor actual de los beneficios, perdiendo importancia si estamos valuando la operación desde el punto de vista del tomador o del emisor a los efectos de la determinación del signo del flujo. Lo importante en realidad es discernir cuáles son costos y cuáles beneficios

Sigamos con el desarrollo y aclaremos todas estas ideas con un ejemplo:

Ejemplo 2.3:

Sea un empréstito de 1000 de valor nominal, con 1000 obligaciones que fueron suscriptas al 100%. Se reembolsará al final del 5 año en forma global. La tasa contractual de interés es del 4% anual. Determinar cuál debería ser el valor de rescate para que el empréstito rindiera el 5% anual.

Recordemos la ecuación:

$$VAC=VAB$$

donde la tasa involucrada en el valor actual es la i' (o TIR)

En el caso de rescate no a la par, podría reformularse como:

$$VS=VABP+VAR \quad (2)$$

Donde

VS= Valor de suscripción
VABP=Valor actual de los beneficios percibidos durante la tenencia del empréstito
VAR=Valor actual del rescate no a la par del empréstito

Veamos un diagrama unidimensional, y planteemos las ecuaciones para resolver el problema, utilizando para este caso el valor de una obligación:

0	1	2	3	4	5
-1.000	+40	+40	+40	+40	+40 +Valor Rescate

Para armar la ecuación según (2) deberíamos utilizar:

VS=1000
$VABP=40\,\alpha_{5|}^{0,05}$
VAR=Valor Rescate $(1,05)^{-5}$

Por lo tanto, la ecuación es:

$$1000 = 40\alpha_{\overline{5|}0,05} + VR(1,05)^{-5}$$

Si despejamos VR (que es el valor de rescate que deberíamos pagar para que la operación entera rinda el 5%), nos queda:

$$VR = \left[1000 - 40\alpha_{\overline{5|}0,05}\right] \times 1,05^{5} = 1.055,26$$

Nos queda por resolver la tasa de interés que resultaría de un determinado valor de rescate.

Ejemplo 2.4: Supongamos el mismo empréstito del ejemplo 2.3. Determinar cuál sería la tasa de interés que resulta si el emisor del empréstito produce una quita del 10% sobre el valor nominal teniendo en cuenta que se suscribió al 90%.

0	1	2	3	4	5
-900	+40	+40	+40	+40	+40 +900

Tomando como fecha de valuación k=0, tenemos que:

$$900 = 40\alpha_{\overline{5|}i'} + 900(1+i')^{-5}$$

Aplicamos Newton, por lo que ponemos la ecuación en forma implícita:

$$900 - 40\frac{1-(1+i')^{-5}}{i'} - 900(1+i')^{-5} = 0$$

$$F(i') = 900 - 40i'^{-1}\left[1-(1+i')^{-5}\right] - 900(1+i')^{-5} = 0$$

Aplicamos distributiva y la expresión nos queda:

$$F(i') = 900 - 40i'^{-1} + 40i'^{-1}(1+i')^{-5} - 900(1+i)^{-5}$$

Luego sacamos la derivada $F'_{(i')}$:

$$F'(i') = 0 - 40(-1)\, i'^{-2} + 40(-1)\, i'^{-2}(1+i')^{-5} + 40\, i'^{-1}(-5)(1+i')^{-5-1} - 900(-5)(1+i')^{-5-1}$$

$$F'(i') = 0 + 40 i'^{-2} - 40\, i'^{-2}(1+i')^{-5} - 200 i'^{-1}\,(1+i')^{-6} + 4500\,(1+i')^{-6}$$

Ahora, a partir de un valor de i' "arbitrario", comencemos las iteraciones hasta encontrar la solución:

i	F(i´)	F´(i´)
0,045	2,19498837	3944,86242
0,04444358	-0,00340869	36544,3134
0,04444368	-0,00303959	36544,16

La arbitrariedad de i’ es relativa. Como punto de partida podríamos utilizar la tasa nominal, tal cual lo hemos hecho en el ejemplo. No obstante, podríamos acelerar la convergencia a la solución si eligiéramos un valor más cercano como valor inicial de las iteraciones.

Como vemos en el ejemplo 2.4, si bien la obligación fue rescatada bajo la par (lo que implicaría una tasa de rendimiento que podría ser negativa, por la magnitud de la quita) al haber simultáneamente una suscripción bajo la par se compensa en parte el efecto, llevando el rendimiento al 4,44%.

PARTE III: COMPRA VENTA EN EL MERCADO

Se tratará en esta parte la compra y venta (transferencia) de obligaciones de empréstitos, ya sean títulos públicos (normalmente denominados Bonos) o privados (como por ejemplo los instrumentos que emiten las Personas Jurídicas como Sociedades Anónimas) que se transan en los mercados de valores normalmente con la denominación de Obligaciones Negociables.

Tanto para uno como para otro caso, la primera particularidad que debemos considerar es que debido a la transacción en el mercado, tanto los valores de transferencia como las tasas de rendimiento involucradas son distintas a las contractuales.

La otra particularidad es que la visión de estos rendimientos o de estos valores a los que se hacen las transacciones son exclusivamente desde el punto de vista de los obligacionistas o tomadores del empréstito.

Pero explayémonos más en el primer aspecto señalado, es decir las tasas y los valores que se producen en el mercado y su comparación con los contractuales. Respecto de su denominación, vamos a hacer la convención de llamarlos "nominales", por ser aquellos valores que figuran en las condiciones de contratación del empréstito. Para el caso de la tasa llamaremos a la tasa de emisión del empréstito "tasa nominal", pero en alusión exclusiva de que figura en las condiciones de emisión del empréstito, ya sea éste público o privado. La simbología utilizada para ésta será "i". Vale la pena aclarar que la denominación de "nominal" hace referencia a que, de alguna forma, se encuentra "escrita" ("se nombra") en las condiciones de emisión y estrictamente, no siempre tienen que ver con las tasas nominales (ya sean vencidas o adelantadas) que hemos aprendido junto con la función exponencial del interés. Algo parecido ocurre con los flujos de fondos propiamente dichos. Es decir, una obligación puede comprarse o venderse en el mercado y no se lo hará justamente a su valor nominal. Esto hace que surjan flujos distintos a sus equivalentes nominales, ya sea en la compra o en la venta.

Para entendernos mejor, veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.1: Supongamos un empréstito con reembolso global a los 10 períodos de emitido, cuyo valor nominal es de 100 pesos por obligación y tasa nominal i del 10% periódico. Por simplicidad, supongamos que fue colocado a 100 pesos (por lo que no hay colocación sobre o bajo la par). Es decir, el público lo aceptó en el momento de su colocación, por exactamente su valor nominal en la instancia de colocación primaria. Si quien lo suscribió en origen lo vendiera en el mercado, seguramente lo hará a un valor distinto de 100, digamos por ejemplo 90. (Obviamente, este último valor dependerá de las condiciones del mercado en ese momento). Supongamos además que se vende inmediatamente luego de cobrar el quinto servicio de intereses (final del período 5) El hecho de que un empréstito de 100 de valor nominal se transe a un valor distinto de este último necesariamente hace surgir una nueva medida de rendimiento, distinta de la tasa nominal, que llamaremos i' (i prima) o "tasa efectiva". Esta medida es distinta tanto para quien vende el empréstito como para quien lo compra. Adicionalmente hay que darle especial atención al momento de recuperación de la inversión (período 5 para el caso del ejemplo) Ambas circunstancias (valor de compra-venta y momento de la transacción) hacen surgir una tasa distinta a la nominal tanto para el que la compra como para el que la vende. Cabe aclarar que la tasa i´ también es denominada TIR (tasa interna de retorno) o tasa implícita de rentabilidad. A los efectos prácticos, en este trabajo la denominaremos tasa i prima (i').

El esquema conceptual que seguiremos será el siguiente:

a) Determinaremos valores de compra o de venta de obligaciones, cualquiera sea su forma de reembolso y en cualquier momento de la duración del empréstito, de modo que rindan una tasa (i') determinada a priori (o tasa de rendimiento deseada). Para esto ocuparemos herramientas de la Teoría de la Inversión ya vistas en desarrollos anteriores del curso.

b) Determinaremos la tasa efectiva de rendimiento (i') para valores de compra o de venta dados apriori (como podrían ser los valores a los que se puede comprar o vender una obligación en el mercado en cualquier momento de la duración del empréstito). Las herramientas que nos ofrece el Cálculo Financiero para esta solución son diversas y algunas de ellas ya han sido aprendidas también previamente en el curso (por ejemplo el método de Newton para la determinación de la tasa de interés).

Determinación de valores de compra o de venta para Reembolso Global con pago periódico de intereses:

Recordemos el ejemplo planteado. Se trataba de un empréstito de 100$ de valor nominal, que paga intereses al 10% y se reembolsa globalmente a los 10 períodos de emitido. Si el tenedor lo vende inmediatamente luego de cobrar el quinto servicio para que la operación rinda, digamos por ejemplo, el 8,3058%, cuál debería ser el valor de venta de la obligación?. Veamos el planteo de flujos y apliquemos lo aprendido en la teoría de la inversión:

k	Valores	Observaciones
0	-100	
1	10	10% de 100
2	10	"
3	10	"
4	10	"
5	10+PV	10 de interés + precio de venta

Si fijamos como Fecha de valuación el momento 0, para que esta inversión de 100 pesos (valor de compra o suscripción) produzca un rendimiento del 8,3058% periódico, deberá venderse en PV pesos, si además produce flujos positivos de 10 pesos al final de cada período. En términos de la Teoría de la Inversión, tenemos que igualar el valor actual de los costos (VAC) con el de los beneficios (VAB). La TIR de esta "inversión" es la tasa i´. Recordemos que los "costos" en la teoría de la inversión son los flujos negativos. Para nuestro caso especial siempre será el precio de compra, flujo negativo o de egreso de fondos. Respecto de los "beneficios", si bien son todos los flujos con signo positivo que representan un "ingreso" monetario, en esta materia en particular, podemos dividirlos a su vez en dos partes:

1) los que se producen durante la tenencia del empréstito (compuesto por servicios que se perciben durante la tenencia de la obligación)
2) el que se produce en el momento de la venta o reembolso ya sea por la venta en el mercado de la obligación o por la extinción natural del empréstito, ya que su tenedor lo tuvo hasta la extinción total de la obligación. La distinción entre venta o reembolso natural no tiene demasiada importancia a los efectos del cálculo, como veremos más adelante.

Por lo tanto, la famosa ecuación:

VAC=VAB, donde la tasa involucrada en el valor actual es la i' (o TIR)

podría reformularse como:

$$PC=VABP+VAPV \qquad (A)$$

Donde:

PC= precio de costo

VABP=Valor actual de los beneficios percibidos durante la tenencia del empréstito

VAPV=Valor actual del precio de venta/rescate

Cualquiera sea la notación utilizada, conceptualmente:

VAC=VAB, con tasa i’
Costos: -100 (precio de compra)
Beneficios: +10 periódico al final de cada período más el PV al final del quinto período

En un diagrama unidimensional, el planteo sería:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-100	+10	+10	+10	+10	+10 +PV					

Si traducimos esto a términos matemáticos, la ecuación es:

$$100 = 10\alpha_{\overline{5|}}^{0,083058} + PV(1,083058)^{-5} \qquad (1)$$

Si despejamos PV (que es el precio de venta de la obligación para que la operación rinda el 8.3058% periódico) y la resolvemos, nos queda:

$$PV = \left[100 - 10\alpha_{\overline{5|}}^{0,083058}\right] \times 1,083058^{5} = (100 - 39,6053) \times 1,490258 = 90 \qquad (2)$$

A través de la aplicación de la teoría de la inversión (igualando el VAC con el VAB) podremos determinar el precio de venta o de compra cualquiera sea el sistema de reembolso (global o reembolso periódico constante, o cualquier otra forma de reembolso que se nos ocurra).

Ejemplo 3.2: planteemos un caso análogo al ejemplo anterior, pero para determinar el precio de compra al final del período 5, si se lo mantiene hasta el final de la vida de la obligación. El rendimiento requerido es el mismo que en el caso del ejemplo anterior, es decir el 8,3058%. Los flujos negativos (o costos) son solamente el precio de compra El diagrama unidimensional sería el siguiente:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
					-PC	+10	+10	+10	+10	+10 +100

VAC=VAB

$$PC = 10\alpha_{\overline{5}|}^{0,083058} + 100 \times (1,083058)^{-5} \qquad (3)$$

$$PC = 39,6053 + 67,1029 = 106,7082$$

Ahora bien, el cálculo no cambia mayormente si la compra fuera por ejemplo en el período 3 vendiendo en el mismo período que el ejemplo anterior (es decir en 5) ya sea que dado un precio de compra y un rendimiento requerido se quiera determinar un precio de venta o bien con los datos del precio de venta y rendimiento requerido se quiera determinar el precio de compra. El diagrama unidimensional sería el siguiente:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			-PC	+10	+10 +PV					

Para determinar PV (precio de venta) si suponemos un precio de compra PC=100, la ecuación (2) se transformaría en:

$$PV = \left[100 - 10\alpha_{\overline{2}|}^{0,083058} \right] \times 1,083058^{2} = (100 - 17,7582) \times 1,1730 = 96,4696 \qquad (4)$$

Recordemos que esta ecuación proviene de VAC=VAB. Para este caso en particular, la fecha de valuación será fin del período 3.

$$100 = 10\alpha_{\overline{2}|}^{0,083058} + PV(1,083058)^{-2}$$

Comparando la ecuación (2) con la (4), vemos que conceptualmente el planteo es exactamente el mismo. La fecha de valuación en (4) es el momento de la compra (es decir final del período 3) y en la ecuación (2) era el momento de la emisión (inicio período 1). Cambia la cantidad de períodos de tenencia del empréstito.

Algo análogo ocurre si dado un precio de venta en el mercado deseamos saber el precio de compra para que la operación tenga un determinado rendimiento.

Ejemplo 3.3: supongamos que PV=106 en el período 5 y el rendimiento deseado es del 8.3058% periódico. Veamos el planteo. La fecha de valuación es final del período 3 y la ecuación de equivalencia de los flujos es la siguiente:

$$PC = 10\alpha_{\overline{2}|}^{0,083058} + 106 \times (1,083058)^{-2}$$

Resolviendo:

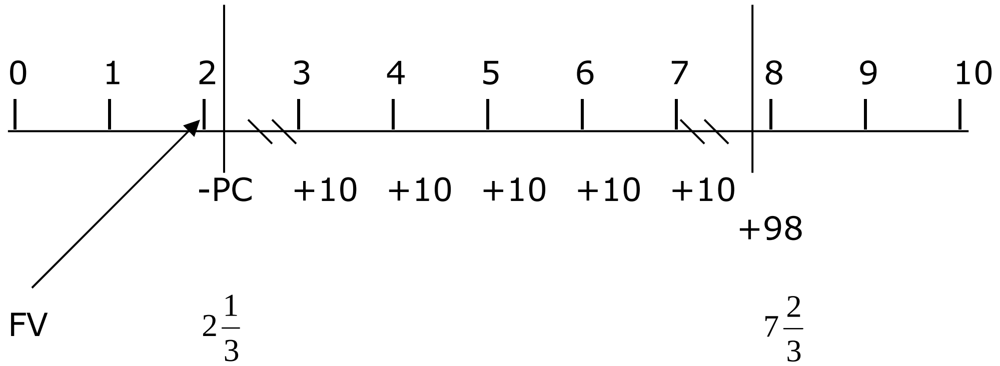
$$PC = 10\alpha_{\overline{2}|}^{0,083058} + 106 \times (1,083058)^{-2} = 17,7582 + 90,3655 = 108,1237$$

Hasta ahora, el cálculo ha sido en tiempo entero, tanto para la venta como para la compra. Es decir, el momento de la transacción coincidía exactamente con la finalización del período. Pero esto es lo menos probable. Es común que las transacciones se hagan en cualquier momento, más allá de los de pago de renta o amortización.

Ejemplo 3.4: supongamos que para el mismo empréstito, los períodos tienen seis meses de duración. Por simplicidad, los vamos a medir en meses, más allá de la cantidad de días que dure el semestre, aunque en honor a la exactitud, hay veces que corresponde la valuación exacta en días, para determinar las fracciones de período. Esta circunstancia suele estar determinada en las condiciones de emisión del empréstito, haciendo referencia a que el empréstito utilizará años de 360 o de 365 días. Para el ejemplo en particular utilizaremos el enfoque de años de 360 días, por lo tanto, cada período del empréstito es de seis meses de duración. Si la compra se hace 2 meses después del período 2 y la venta 4 meses después del período 7, para que la inversión rinda el 8,3058%, determinaremos:

a) El precio de compra en el momento 2+2/6 (mejor: 2+1/3) si el precio de venta en el momento 7+4/6 (mejor 7+2/3) es de 98.
b) Si el precio de compra en el momento 2+1/3 es de 97, cuál sería el precio de venta en el momento 7+2/3 para un rendimiento del 8,3058%.

Veamos el primer caso (a):



Para este caso en el que la valuación de los costos y beneficios, es fraccionaria, (para el ejemplo 2+1/3) conviene corregirla, fijando la fecha de valuación en el período entero inmediato anterior. Otro aspecto a tener en cuenta es que el precio de venta también es en tiempo fraccionario, por lo que esta circunstancia deberá ser tenida en cuenta en el valor actual de los beneficios. Entonces:

VAC=VAB

Si la fecha de valuación la fijamos en el período 2:

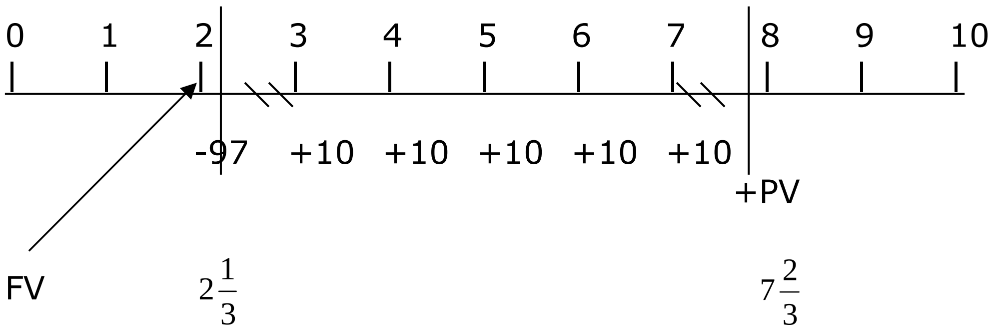
$$PC \times 1,.083058^{-\frac{1}{3}} = 10\alpha \frac{0,083058}{5\,|} + 98 \times 1,083058^{-5\frac{2}{3}} \qquad (5)$$

Como vemos, el valor de compra ha sido corregido a la tasa de rendimiento por 1/3 de período, para valuarlo en el período 2. Por otro lado, los beneficios percibidos de la obligación son 5 servicios de 10 cada uno, por lo que podemos armar una renta que por su naturaleza queda directamente valuada en 2 (ya que es vencida). Nótese que la percepción de los 10 pesos del período 8 no se incluyen en la valuación, porque la obligación se vende antes de percibir este importe. Queda valuar el precio de venta en la fecha de valuación (período 2). Por eso se la corrige por 5 períodos enteros más 2/3 de fracción del período 8.

Despejando de la ecuación (5) obtenemos el precio de compra:

$$PC = 10\alpha\frac{0{,}083058}{5}\times 1{,}083058^{\frac{1}{3}} + 98\times 1{,}083058^{-5\frac{2}{3}}\times 1{,}083058^{\frac{1}{3}} = 40{,}6749 + 64{,}0349 =$$
$$= 104{,}7098$$

Para el caso (b) tendríamos:



Las consideraciones respecto al momento de la valuación son exactamente las mismas que en el caso a), con la diferencia del cambio de incógnita (ya no buscamos el precio de compra sino el precio de venta). La ecuación de equilibrio sería:

$$97\times 1{,}.083058^{-\frac{1}{3}} = 10\alpha\frac{0{,}083058}{5} + PV\times 1{,}083058^{-5\frac{2}{3}}$$

y despejando:

$$PV = \left(97\times 1{,}.083058^{-\frac{1}{3}} - 10\alpha\frac{0{,}083058}{5}\right)\times 1{,}083058^{5\frac{2}{3}} =$$
$$(95{,}7922 - 39{,}6074)\times 1{,}5717 = 88{,}3057$$

Determinación de valores de compra o de venta para Reembolso Periódico Constante:

Todo lo dicho con anterioridad es válido para el caso de reembolso periódico constante, a la manera del sistema alemán, ya sea que existan pagos de interés entre los pagos de amortización o no.

Ejemplo 3.5: supongamos ahora un nuevo ejemplo para estudiar las ecuaciones para estos casos. Sea una obligación de 1000 pesos a reembolsar en 5 años (200 pesos cada año). Además, el empréstito tiene una tasa contractual del 5%. Es importante tener claro el esquema integral de los servicios del empréstito, ya que serán indispensables para conocer los flujos positivos ("beneficios") y su valor actual a los efectos de la aplicación de la Teoría de la inversión. Veamos el cuadro con la evolución de la deuda:

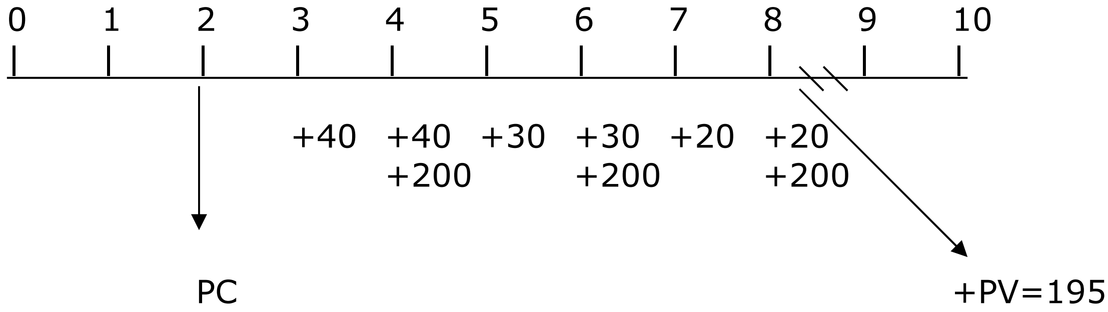
k	***Interés: y_k***	***Amortización: t_k***	***Servicio (t+y) s_k***	***V_k***
0				1000
1	50		50	1000
2	50	200	250	800
3	40		40	800
4	40	200	240	600
5	30		30	600
6	30	200	230	400
7	20		20	400
8	20	200	220	200
9	10		10	200
10	10	200	210	0

Determinemos el precio de compra de una obligación inmediatamente luego de cobrar el servicio 2, si se la vende dos meses después de cobrar el servicio 8 en 195 si el rendimiento deseado es del 6% semestral. Recordemos la ecuación (A), donde:

$$PC = VABP + VAPV$$

Traduzcamos esta ecuación en términos de nuestro ejemplo y luego despejemos el valor de compra, que es lo que buscamos. La fecha de valuación será en 2 y recordemos, según (A), que debemos determinar el valor actual de los beneficios percibidos durante la tenencia del empréstito por un lado y por el otro, el valor actual del precio de venta, todo valuado en 2.

Los beneficios percibidos durante la tenencia, para el caso de obligaciones con reembolso periódico constante anual con pago de intereses semestral (tal cual el ejemplo que estamos utilizando) serán según el cuadro de evolución más arriba explicitado, los siguientes: $s_3=40$; $s_4=240$; $s_5=30$; $s_6=230$,$s_7=20$ y $s_8=220$,. El valor actual de estos beneficios puede plantearse valor por valor o bien como rentas escindidas de acuerdo a la siguiente forma: tres rentas semestrales, la primera de dos cuotas de 40, la segunda, diferida y de dos cuotas de 30 y la tercera diferida y de dos cuotas de 20, más una renta anual de tres cuotas de 200. Esta última renta es inmediata en este caso en particular.

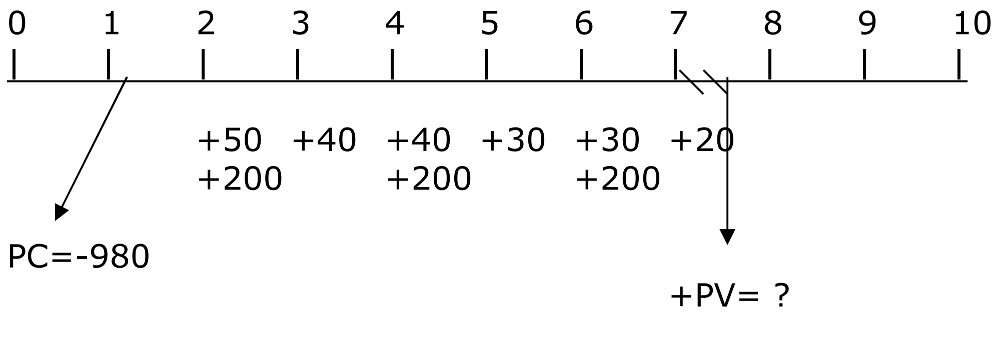


$$VABP = 40\alpha\left.\frac{0,06}{2}\right| + 30\alpha\left.\frac{0,06}{2}\right| \times 1,06^{-2} + 20\left.\frac{0,06}{2}\right| \times 1,06^{-4} + 200\alpha\left.\frac{1,06^{2}-1}{3}\right| = 628,74 =$$

Además, debemos tener en cuenta que la tasa a utilizar en la renta anual de 200 es la anual equivalente al 6% semestral. Teniendo todo esto en cuenta, la determinación del precio de compra en este caso sería:

$$PC = 628,74 + 195 \times \left(1,06^{-6\frac{1}{3}}\right) = 628,74 + 134,82 = 763,56$$

Ejemplo 3.6: supongamos ahora que deseamos conocer a cuánto deberíamos vender una obligación en el mercado, 3 meses luego de cobrar el séptimo servicio si la obligación se adquirió un mes después de cobrar el primer cupón en 980 pesos y se desea un rendimiento del 6% semestral. El análisis en un diagrama unidimensional sería:



Recordemos que, de acuerdo a lo explicitado con anterioridad, respecto de las fechas de valuación en tiempo no entero, la valuación de los flujos (costos y beneficios) la haremos en 1. Teniendo en cuenta la ecuación (A):

$$980\times 1{,}06^{-1/6} = 50\times 1{,}06^{-1} + 40\alpha\frac{0{,}06}{2\,\big|}\times 1{,}06^{-1} + 30\alpha\frac{0{,}06}{2\,\big|}\times 1{,}06^{-3} + 20\times 1{,}06^{-6} +$$
$$+ 200\alpha\frac{1{,}06^{2}-1}{3\,\big|}\times 1{,}06 + PV\times 1{,}06^{-6\frac{1}{2}}$$

Resolviendo tenemos:

$$970{,}5288 = 47{,}1698 + 69{,}1846 + 46{,}1806 + 14{,}0992 + 506{,}0547 + PV\times 1{,}06^{-6\frac{1}{2}}$$

$$287{,}8399 = PV\times 1{,}06^{-\frac{13}{2}}$$

PV=287,8399/0,684718 = 420,38

Determinación de la tasa i’ dados un precio de compra y/o un precio de venta:

El problema de la determinación de i’ (explícitamente, rendimiento de la operación o tasa interna de retorno o implícita de rentabilidad) tiene su fundamentación conceptual en la ecuación (A) que hemos planteado en este mismo capítulo. Es decir, dada una obligación de un empréstito, deberemos plantear el VAC=VAB, ambos valuados a la tasa i’, incógnita en este caso. Dicho más específicamente, definidos los flujos de salida o egreso (el precio de compra) y/o los ingresos o beneficios (servicios y precio de venta en su caso), deberemos actualizar ambos a la tasa buscada (i’), incógnita a resolver. La fecha de valuación será la fecha tal cual la hemos fijado en los ejemplos 1 al 6 de este mismo capítulo. Hasta ahora, no existe ninguna dificultad adicional a lo que ya hemos visto. El verdadero desafío se encuentra en el procedimiento a emplear para determinar la tasa de interés que rinde este tipo de operaciones, ya que dependerá del caso analizado, el procedimiento que utilizaremos en su solución. Obviamente, habrá planteos que pueden ser resueltos con un simple despeje algebraico. Pero habrá otros que nos harán recurrir a herramientas del cálculo numérico, por no ser posible el despeje algebraico de la variable buscada. En este sentido, podríamos distinguir:

1) Casos que pueden ser resueltos algebraicamente

2) Casos que deben ser resueltos a través de procedimientos de cálculo: tenemos dos alternativas no excluyentes, es decir que pueden resolverse por cualquiera de ambos métodos

a. Por método de Newton
b. Por método iterativo de Tulián[3]:

En el presente trabajo desarrollaremos ejemplos para 2 a), ya que será el método de Newton el que utilizaremos en el desarrollo de nuestra materia. [4]

Determinación de la tasa de interés. Casos que pueden ser resueltos algebraicamente:

Básicamente, estos casos serán aquellos en los que la ecuación no sobrepase el segundo grado. Es decir que, dado un planteo de igualdad de costos y beneficios, la variable buscada (i') aparece al cuadrado. No obstante, recordemos que para resolver una ecuación de segundo grado debemos darle a la ecuación la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (6)$$

En donde podremos determinar las raíces, con la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (7)$$

No obstante existir solución algebraica para las ecuaciones de segundo grado, siguiendo un sentido práctico, solucionaremos aún estas ecuaciones con los métodos numéricos o de cálculo.

Las soluciones algebraicas las utilizaremos en ecuaciones de grado inferior, en donde el despeje de la incógnita sea sencillo y rápido.

---

[3] en estos casos es necesario distinguir: compra o suscripción con tenencia hasta el final; venta con suscripción al inicio y compra y venta.

[4] El método iterativo de Tulián puede ser consultado en la publicación "*Cálculo Financiero de Empréstitos* "; TULIÁN, Eliseo César y FRARE, María Juana, , Serie Estudios, Sección Matemática N° 7, Segunda Edición, (FCE, UNC, Mendoza, 1999). (39 páginas).

Ejemplos:

Utilizando los ejemplos ya vistos, plantearemos diversos casos en los que se puede realizar el despeje algebraico de la incógnita. Recordemos el ***Ejemplo 2*** y su diagrama unidimensional

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|
					-PC	+10	+10	+10	+10	+10
										+100

Ejemplo 3.7: supongamos que se compra en 980 pesos en 5 y se vende inmediatamente luego de cobrar el sexto cupón de intereses a 978 pesos. Cuál sería el rendimiento de esta operación ?. Planteemos la ecuación (A):

PC=VABP+VAPV

$$980 = 10(1+i')^{-1} + 978(1+i')^{-1} = 988(1+i')^{-1}$$

Despejando algebraicamente:

$$(1+i')^{-1} = \left(\frac{980}{988}\right) \Rightarrow i' = \frac{988}{980} - 1 = 0{,}0081632653 = 0{,}816\%$$

Como vemos, el problema debería incluir los flujos teniendo en cuenta no ir más allá de los dos períodos entre el momento de la compra y el de la venta para poder solucionarlo algebraicamente. Como dijimos antes y a modo de ejemplo, plantearemos un caso en donde la solución se reduce a una ecuación de segundo grado de la forma detallada en la fórmula (6) y donde utilizaremos la solución de acuerdo a lo explicitado en la fórmula (7).

Ejemplo 3.8: supongamos el mismo ejemplo 7, pero con venta en el período 7, inmediatamente después de cobrar el segundo cupón de 10 pesos. El planteo de los flujos, según (A) sería:

$$980 = 10(1+i')^{-1} + 10(1+i')^{-2} + 978(1+i')^{-2}$$

Reemplazando $(1+i')^{-1}$ por v; e igualando a 0 la ecuación, nos queda:

$$988v^2 + 10v - 980 = 0$$

Sobre esta ecuación, si podemos aplicar la fórmula (7), que con los valores correspondientes de a, b y c, sería:

$$v_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \times 988 \times (-980)}}{2 \times 988} = 0,990895317$$

(solución correspondiente a la operación de suma, ya que la otra raíz se desestima por dar una solución <0)

Recordemos que $(1+i'')^{-1} = v$

$$(1+i')^{-1} = 0,990895317$$

$$1+i' = (0,990895317)^{-1}$$

$$i' = (0,990895317)^{-1} - 1 = 0,009188$$

Por lo tanto, la tasa de rendimiento de esta operación es del 0,9188%.

Determinación de la tasa de interés. Casos que deben ser resueltos a través de procedimientos de cálculo: Método de Newton.

El método de Newton es de amplia aplicación en la determinación de la tasa de interés. Cualquiera sea el planteo de los flujos (reembolso global, reembolso periódico constante, compra y/o venta en tiempo entero o en tiempo fraccionario, obligaciones enteras o fraccionadas, e inclusive cualquier otro sistema de reembolso distinto a los que hemos visto), admite una solución a través de este método. No obstante su aplicabilidad, mientras más complejo sea el valor actual de los flujos, más compleja y tediosa será la solución numérica. Precisamente, esta es la gran desventaja del método, más allá de ofrecer una solución absolutamente general.

Recordemos el procedimiento de cálculo:

a) la primera instancia en este método es darle una forma implícita (es decir igualada a 0) a la ecuación del valor actual de los costos y beneficios que el empréstito implique, de acuerdo a los valores de compra, suscripción, venta y servicios percibidos. Es decir, comenzamos por plantear la ecuación (A) y darle un forma implícita. A esta ecuación la denominamos F(i').

b) luego deberemos determinar la ecuación de la derivada primera con respecto a la variable que se está tratando de averiguar (i'). A esta ecuación la denominamos F'(i')

c) Por último, eligiendo convenientemente un estimador al que denominamos i'_o, comenzamos por determinar los valores de la función y su derivada para este estimador y plantear la ecuación siguiente:

$$i'_{k+1} = i'_k - \frac{F(i'_k)}{F'(i'_k)} \qquad (8)$$

Donde:

i'_{k+1}: valor de la variable buscada a usar en la próxima iteración (k+1)

$F(i'_k)$: valor de la función implícita para el valor de la variable en la iteración k

$F'(i'_k)$: valor de la derivada de la función implícita para el valor de la variable en la iteración k

Obviamente el valor de i'_{k+1} se utilizará para determinar el valor de la función y de su derivada, aplicándose nuevamente la fórmula de la ecuación (8) hasta encontrar un valor de la variable que satisfaga la ecuación de equilibrio de los flujos. Veamos un ejemplo

Ejemplo 3.9: supongamos un empréstito a reembolsar globalmente, a los 10 períodos de emitido, cuyas obligaciones son de 1000 pesos de valor nominal. Si una obligación se compró luego de percibir el segundo servicio, determinar la tasa de rendimiento de la operación, si se vende inmediatamente luego de cobrar el quinto cupón en 1030 pesos teniendo en cuenta que tiene una tasa contractual del 4% periódico.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		-970	+40	+40	+40					
					+1030					

Recordemos que, en general:

PC=VABP+VAPV

Con los flujos del empréstito y valuando en 2:

$$970 = 40\alpha\frac{i'}{3} + 1030(1+i')^{-3}$$

Explicitando Newton:

$$970 - 40\,i'^{-1}\left[1-(1+i')^{-3}\right] - 1030(1+i')^{-3} = 0$$

Determinamos F(i’) y F’(i’) y nos quedan:

$$F(i')=970-40i'^{-1}+40i'^{-1}(1+i')^{-3}-1030(1+i')^{-3}$$

$$F'(i')=0-40(-1)i'^{-2}+40(-1)i'^{-2}(1+i')^{-3}+40i'^{-1}(-3)(1+i')^{-3-1}-1030(-3)(1+i')^{-3-1}$$
$$F'(i')=0+40i'^{-2}-40i'^{-2}(1+i')^{-3}-120i'^{-1}(1+i')^{-4}+3090(1+i')^{-4}$$

Si comenzamos con una tasa cualquiera, digamos por ejemplo, la tasa nominal del empréstito (por lo tanto i'_0=0,04), el resumen de las iteraciones sería:

i	F(i´)	F´(i´)
0,04	-56,6698908	2852,02341
0,05987007	-2,07215124	2646,67058
0,06065299	-0,00301769	2638,96656
0,06065414	-0,0000000064218	2638,95533
0,06065414	0	2638,95533

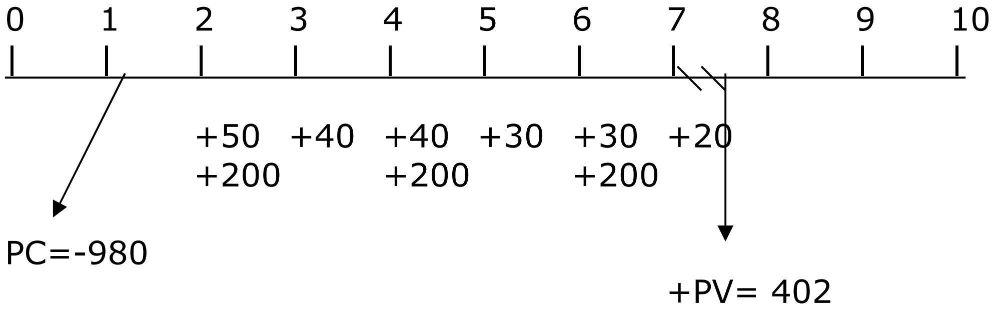
La tasa efectiva para este caso es del 6,06%. Parra llegar a la conclusión de que es una buena aproximación, verifiquémosla en la ecuación de equilibrio de los flujos:

$$PC=40\alpha\frac{0.0606}{3}+1030(1{,}0603)^{-3}=106{,}79+863{,}21=970$$

Al verificarse el precio de compra con la tasa hallada, vemos que es una buena solución numérica.

Planteemos ahora un ejemplo, para reembolso periódico constante, según el ejemplo 3.6, pero averiguando la tasa i’ para un precio de venta de 402 pesos. Recordemos los datos relevantes, para proceder al planteo de los flujos

Compra: \$980, 1 mes después de cobrar el primer cupón
Venta: \$402; 3 meses luego de 7
El análisis en el diagrama unidimensional sería:



Valuemos ahora todos los flujos en v=1

$$980\times(1+i')^{-1/6}=50\times(1+i')^{-1}+40\alpha\frac{i'}{2|}\times(1+i')^{-1}+30\alpha\frac{i'}{2|}\times(1+i')^{-3}+20\times(1+i')^{-6}+$$
$$+200\alpha\frac{(1+i')^{2}-1}{3|}\times(1+i')+402\times(1+i')^{-6\frac{1}{2}}$$

Como se puede apreciar, la formulación de F(i’) tiene cierta complejidad y más aún su derivada. En estos casos, convendría reformular el valor actual de los beneficios, sumándolos. De esta forma tendríamos:

$$980\times(1+i')^{-1/6}=250\times(1+i')^{-1}+40\times(1+i')^{-2}+240\times(1+i')^{-3}+30\times(1+i')^{-4}+$$
$$+230(1+i')^{-5}+20(1+i')^{-6}+402\times(1+i')^{-6\frac{1}{2}}$$

Entonces F(i’) será:

$$F(i')=980\times(1+i')^{-1/6}-250\times(1+i')^{-1}-40\times(1+i')^{-2}-240\times(1+i')^{-3}-30\times(1+i')^{-4}+$$
$$-230(1+i')^{-5}-20(1+i')^{-6}-402\times(1+i')^{-6\frac{1}{2}}$$

Y su derivada:

$$F'(i')=-\frac{1}{6}980\times(1+i')^{-1/6-1}+250\times(1+i')^{-2}+80\times(1+i')^{-3}+720\times(1+i')^{-4}+$$
$$+120\times(1+i')^{-5}+1150(1+i')^{-6}+120(1+i')^{-7}+2613\times(1+i')^{-7,5}$$

Si procedemos a utilizar los valores de las funciones para i_k en la siguiente ecuación:

$$i'_{k+1}=i'_{k}-\frac{F(i'_{k})}{F'(i'_{k})}$$

en forma iterativa, obtendremos el resultado de la tasa i’, que para este caso será:

It	k	F(i)	F'(i)
0	0,04	59,14159362	3874,199499
1	0,0552655	3,625520014	3564,661772
2	0,05628257	0,104828062	3545,349393
3	0,05631214	0,002788322	3544,790256
4	0,05631295		

La complejidad de los casos a plantear puede llevarse muy lejos. No obstante, es recomendable la ayuda de un computador para realizar cálculos de tasa con funciones muy complejas y con distintas series de flujos. La fundamentación de la enseñanza de este tipo de métodos radica en que es saludable el planteo de los flujos (que será necesario inclusive con ayuda de una computadora, por ejemplo si utilizamos la función TIR en Excel), base para la determinación ya sea de cualquier valuación o bien en la búsqueda de la tasa involucrada en el intercambio de los flujos de fondos.

Cuadro de evolución de la deuda con tasa efectiva i'. Verificación de los cálculos realizados.

Una herramienta interesante para verificar la validez de las soluciones encontradas ya sea de los valores de compra y/o venta o bien de la bondad de la aproximación de la tasa i' es el *cuadro de evolución de la deuda teniendo en cuenta la tasa i'*, a partir de los valores de compra o suscripción hasta el momento de la venta u agotamiento natural de la obligación.

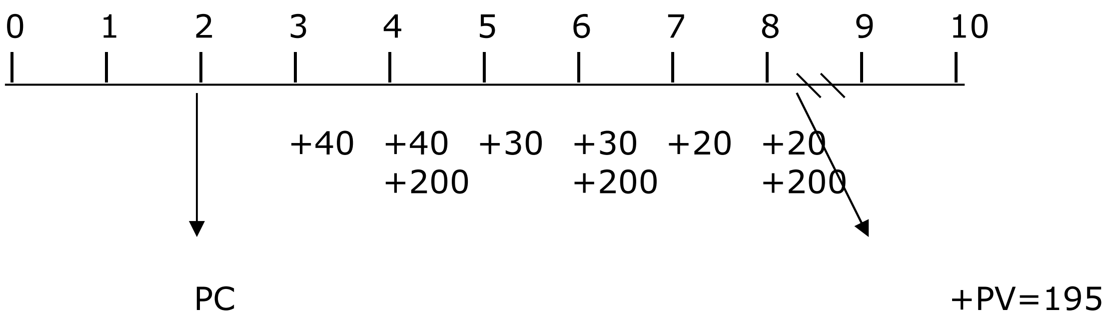
Para poder armarlo hay que distinguir dos conceptos básicos en las disciplinas contables: lo devengado y lo percibido. Más sencillo e inmediato resulta este segundo concepto: para el caso de una obligación de un empréstito, "lo percibido" es cada uno de los servicios que se perciben durante la tenencia de acuerdo a las condiciones originales de contratación del empréstito. Esto es: para el caso de intereses del servicio (y_k) lo que al tenedor se le debe pagar en función de la tasa contractual i (aplicada sobre "el saldo de deuda" que es debido al tenedor de la obligación). Para el caso de amortización incluida en el servicio (t_k) la parte de la obligación que se deba amortizar según las condiciones originarias de contratación del empréstito. Esta última componente dependerá de la forma de reembolso: podría ser el 100% de la obligación si es reembolso global o bien la enésima parte del valor nominal si la obligación se reembolsa en n períodos a la manera del sistema alemán. Con estos conceptos podemos armar la columna de servicios del empréstito a la que llamaremos s_k, siendo $s_k = t_k + y_k$.

Para definir lo que consideraremos equivalente al concepto de "lo devengado" en el caso de empréstitos, apelaremos a dos herramientas fundamentales: los valores efectivos y la tasa efectiva. Es importante destacar que existe entre ambos conceptos una profunda vinculación. Los valores efectivos serán aquellos que han sido o podrían ser transados para que el rendimiento de la operación sea la tasa i'. La tasa i' es aquella que hace que el valor actual de los costos sea igual al de los beneficios. Dicho de otro modo es la TIR de la "inversión". Ejemplos de los valores efectivos serían el precio de compra o suscripción de la obligación. Pero también cada uno de los valores que se obtendrían luego de la percepción de cada uno de los servicios, "devengando" los intereses a la tasa efectiva i'. Dos elementos más necesitamos para construir el cuadro:

a) el interés efectivo (y'_k) que proviene de devengar periódicamente el interés pero con la ***tasa efectiva i'***.

b) la amortización efectiva (t'_k) que la obtendremos por diferencia entre lo percibido del empréstito (sk) y el interés devengado (y'k). Como veremos, es un valor que puede ser mayor, menor o igual a cero.

Veamos la aplicación de estos conceptos a los ejemplos planteados con anterioridad. Recordemos el diagrama unidimensional del ejemplo 5:



Lo "percibido" ya ha sido calculado en el cuadro del ejemplo 5, en donde figura cada uno de los. s_k. Esto constituye nuestro "percibido". Para el cálculo de lo devengado en el ejemplo, partimos del primer "valor efectivo" que tenemos (básicamente un valor distinto al "nominal"), que es el precio de compra en el período 2. Justamente, esta era la incógnita del problema 5 y según el cálculo realizado dio un valor de 763,56. Esto constituye nuestro C'_2. Sobre este "saldo efectivo" devengaremos por un período los "intereses efectivos" a la tasa efectiva (que en el problema era del 6%). En símbolos:

$$y'_k = C'_{k-1} \cdot i'$$

Una vez determinado el interés efectivo, por diferencia con el servicio percibido (s_k) obtendremos la amortización efectiva (t_k). Es decir:

$$t'_k = s_k - y'_k$$

Para obtener el nuevo saldo efectivo, al saldo efectivo del período anterior habrá que restarle la amortización efectiva del período. Es decir:

$$C'_k = C'_{k-1} - t'_k$$

Veamos el cuadro completo:

	PERCIBIDO	***DEVENGADO***		
k	***Servicio*** $s_k = t_k + y_k$	***Interés efectivo*** $y'_k = C'_{k-1} . i'$	***Amortización efectiva*** $t'_k = s_k - y'_k$	***Valor efectivo C'k*** $C'_k = C'_{k-1} - t'_k$
2				763,56
3	40	45,81	-5,81	769,37
4	240	46,16	193,84	575,54
5	30	34,53	-4,53	580,07
6	230	34,80	195,20	384,87
7	20	23,09	-3,09	387,96
8	220	23,28	196,72	191,24
8+ 1/3		3,76		195,00

Resta especificar que el devengamiento del interés efectivo de la fracción del período siguiente (2/6 o bien 1/3) será exponencial por la fracción de tiempo transcurrido. De un modo general:

$$y'_{k+f} = C_{k-1}\left[(1+i')^{f} - 1\right]$$

Donde $f = \dfrac{Dias \cdot transcurridos \cdot del \cdot período}{Total \cdot dias \cdot período}$

Para el caso particular del cuadro:

$$y_{8\frac{1}{3}} = 191{,}24\left[1{,}06^{1/3} - 1\right] = 3{,}76$$

Valor Técnico. Paridad. Cotización

Para el caso especial de las obligaciones de empréstitos que cotizan en Bolsas o Mercados de Valores, existen ciertos elementos que se utilizan para describir su comportamiento, su precio, cuanto queda por amortizar por parte del emisor y algunas relaciones entre cotizaciones y valores teóricos de las obligaciones.

En este sentido, conviene puntualizar los siguientes conceptos:

a) **Valor nominal:** es el valor de emisión del titulo u obligación.
b) **Valor residual:** es el valor de emisión del título u obligación, menos el capital que ya se amortizó.
c) **Valor técnico:** se calcula tomando el valor nominal más los intereses devengados (a la tasa de emisión del empréstito) menos la amortización de capital si corresponde deducirla.

Si reproducimos el cuadro del ejemplo 3.5, recordemos que:

k	***Interés:*** y_k	***Amortización:*** t	***Servicio (t+y)*** s_k	C_k
0				1000
1	50		50	1000
2	50	200	250	800
3	40		40	800
4	40	200	240	600
5	30		30	600
6	30	200	230	400
7	20		20	400
8	20	200	220	200
9	10		10	200
10	10	200	210	0

La columna Vk muestra los valores técnicos de esta obligación para k=1 hasta 10. Si la valuación se hiciera en tiempo fraccionario habrá que considera los intereses corridos devengados hasta el momento de la valuación.

d) **Intereses corridos:** el pago de intereses se realiza en fechas que se establecen en el contrato de emisión del bono, en consecuencia los intereses devengados que aún no pueden exigirse, los denominaremos "corridos".

Siguiendo con el mismo ejemplo, el valor técnico en v=6+2/3 sería:

$$VT=V_6(1+i)^{2/3} = 400 \times 1{,}05^{2/3} = 413{,}22$$

e) **Paridad:** la paridad surge de comparar el valor de cotización que da el mercado en un momento determinado con el valor técnico, calculado según lo que se determina en los puntos c) y d). Por ejemplo, si la cotización de la obligación del empréstito del ejemplo considerado fuera de 368 pesos en 6 2/3; la paridad sería:

Par = Cotización / Valor Técnico = 368/413,22 = 89,05%

Veamos un ejemplo de estos elementos en alguna publicación especializada[5], que publica datos, en este caso para el 14/03/2016, del PMO18, bono de la provincia de Mendoza, con reembolso periódico, que finaliza en el año 2018.

Datos técnicos			
TIR	12,28%	Vencimiento	30/10/18
Mod. Duration (años)	1,24	Valor Residual	64,68%
Paridad	89,3%	Valor técnico	64,91
Intereses corridos	0,23	Cupón	2,75
Próximo pago	30/04/16	Múltiplo mínimo	1
Índice ajuste	-		

Vemos que el valor residual al 14/03/2016 es de 64,68%. Si consultamos las condiciones de emisión, se puede deducir que se han amortizado desde octubre de 2014 (primera amortización irregular, del 5,92%, y luego amortizaciones trimestrales del 5,88%) un total

[5] http://www.puentenet.com/cotizaciones/bonosCotizaciones!getBonoById.action?id=BONO_PMO18

de 35,32%=5,92%+5x5,88%. Por eso la publicación señala un valor residual de 64,68%=100%-35,32%.

Los intereses corridos desde la última fecha de pago de cupón (enero de 2016) ascienden a 0,23 (tasa: 2,75/4=0,6875 de interés trimestral. Para un mes aproximado de interés, se publica 0,6875/3=0,229. Para estos cálculos hay que revisar las condiciones de emisión, según las cuales se cuentan meses enteros y no días exactos, tomándose años de 360 días.

El valor técnico se obtiene sumándole al valor residual, los intereses corridos:

$$VT=64,68+0,23=64,91$$

A este valor técnico, le correspondería una cotización de:

Par=Cot/VT

89,3%=Cot/64,91

Cot=89,3% x 64,91 = 57,96

Esta debería ser la cotización utilizada en la determinación de la TIR publicada, teniendo en cuenta también, todos los flujos involucrados en el bono hasta su total extinción.

APÉNDICE: Simbología y Glosario específico de Empréstitos:

Período de renta: es la periodicidad básica del empréstito. Está dado por los períodos en los que se paga la renta (o intereses) del empréstito. Las tasas utilizadas tienen la misma periodicidad.

V_0: Valor nominal total del empréstito, desde el punto de vista del emisor

V'_0: Valor efectivo del empréstito en el momento 0, por existir la posibilidad de suscripción no a la par.

i : tasa de emisión (o contractual) del empréstito.

i' : tasa efectiva, por cambio en los flujos de fondos prometidos según condiciones de emisión. También se puede deber a valores de compra o venta en el mercado, distintos de los valores nominales correspondientes.

C_0 : valor nominal de una obligación, según condiciones de emisión del empréstito.

C'_0 (ó VS) : valor efectivo o de suscripción de una obligación. Su cálculo está relacionado con la tasa i'.

v : indica el período donde se realiza una transacción (compra o venta) de una obligación de cierto empréstito.

f : tiempo fraccionario transcurrido entre dos períodos de renta de un empréstito

PC ó C'v: precio de compra de una obligación de cierto empréstito en cierto momento (v).

PV ó C'v: precio de venta de una obligación de cierto empréstito en cierto momento (v).

VABP: valor actual de los beneficios percibidos de un empréstito (según condiciones de emisión). Pueden calcularse para todo el empréstito o para una sola obligación, dependiendo el punto de vista del análisis.

VAPV: valor actual del precio de venta de una obligación, valuado al momento de la compra o suscripción de dicha obligación.

VAR: Valor actual del rescate no a la par de un empréstito.

VAB: En la teoría de la inversión, el valor actual de los beneficios.

VAC: En la teoría de la inversión, el valor actual de los costos.

S_k: desembolso total (o servicio) desde el punto de vista del emisor.

s_k : desembolso total (o servicio) desde el punto de vista del tomador.

y'_k : interés efectivo, para los cuadros de evolución de deuda con valores efectivos (valores devengados con i')

t'_k : amortización efectiva, para los cuadros de evolución de deuda con valores efectivos (valores devengados con i')

C'_k : valores de saldo efectivo, para los cuadros de evolución de deuda con valores efectivos (valores devengados con i')

Los valores de y_k; t_k y C_k ; representan sus análogos, pero nominales (no efectivos). Están relacionados con los valores percibidos.

n : cantidad total de períodos de un empréstito, medidos en función de la periodicidad del pago de su renta.

PG: plazo de gracia de un empréstito con reembolso periódico constante, medido en términos de la periodicidad del pago de su renta. Va desde el momento 0 hasta el primer pago de amortización.

p : cantidad de períodos entre dos pagos de renta de un empréstito. Si al renta es sincrónica, es 1. Si es asincrónica, dependerá de cuántos pagos de renta haya entre dos pagos de amortizaciones. Por ejemplo, renta semestral con amortizaciones anuales: p=2.

m: cantidad de pagos de amortización que tiene un empréstito con reembolso periódico constante, cuando las rentas son asincrónicas.

VT: valor técnico (incluye los intereses devengados si el momento de valuación es tiempo fraccionario)

Cot: precio de cotización del bono o empréstito en cierto mercado.

PAR: paridad. Cociente entre Cot y VT.

BIBLIOGRAFIA:

1. FRARE, María Juana. (2009). *Valuación de Deudas.* Serie Cuadernos, Sección Matemática Nº 99, (FCE, UNC, Mendoza). (36 páginas).

2. LEVI, Eugenio. (1973). *Curso de Matemática Financiera y Actuarial*. Volúmenes I y II, Editorial Bosch, Barcelona.

3. TULIÁN, Eliseo César y FRARE, María Juana. (1999). *Cálculo Financiero de Empréstitos ,* Serie Estudios, Sección Matemática N° 7, Segunda Edición, (FCE, UNC, Mendoza). (39 páginas).

4. TULIÁN, Eliseo César y MÓNACO, Mirta Liliana. (1999). *Rentas Ciertas*. Serie Cuadernos, Sección Matemática y Estadística N° 82, Segunda Edición (FCE, UNC, Mendoza). (41 páginas)

5. TULIÁN, Eliseo César y MÓNACO, Mirta Liliana. (1999). *Sistemas de Amortización de Deudas*. Serie Cuadernos, Sección Matemática y Estadística N° 83, Segunda Edición, (FCE, UNC, Mendoza). (49 páginas)