

CÁLCULO II

Ciclo lectivo 2015-2016

Profesora Titular: Mirta Susana González
Jefes de T. Prácticos: Rosa Marina Longás
Ana Beatriz Angelelli

A – REQUISITOS PARA CURSAR

1. **Correlativas:** *Cálculo I*
Álgebra Lineal (regularizada para cursar; aprobada para rendir ex. final)
2. **Manejo de utilitarios:** Manejo del software MATHEMATICA, que ya fue utilizado por los alumnos en las asignaturas Cálculo I y Álgebra Lineal.

B - OBJETIVOS

1. Formación de competencias científicas que permitan identificar y luego enfrentar la problemática de modelos conceptuales de otras disciplinas, en el contexto de funciones de varias variables independientes.
2. Formación de competencias técnicas referidas a optimización, ecuaciones diferenciales y en diferencias.
3. Crear aptitudes para la búsqueda del saber. Desarrollar el espíritu crítico y formar una vocación científica.
4. Formación de competencias en tecnologías con el manejo de la computadora para la resolución de los problemas, con el auxilio del software "Mathematica".
5. Formación de competencias en nuevas tecnologías con el manejo de Internet a través del Campus Virtual de la UNCuyo.
6. Desarrollar la reflexión crítica en el análisis de resultados.
7. Fomentar capacidades para el trabajo en equipo.

C- 1 - PROGRAMA ANALITICO DE ESTUDIO

UNIDAD I

TOPOLOGÍA DEL ESPACIO EUCLÍDEO

- Espacio vectorial real. Espacio euclídeo: producto euclídeo. Espacio Normado: norma. Espacio métrico: distancia.
- Entorno. Puntos de un conjunto: punto interior, exterior, aislado, frontera y de acumulación.
- Conjuntos: abierto, cerrado, acotado y compacto.

UNIDAD II

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

- Función: definición. Dominio. Representación por trazas y por curvas de nivel. Superficies de nivel.
- Planos. Superficies geométricas en el espacio R^3 : esférica, elíptica, hiperbólica, parabólica, cilíndrica.
- Rectas en el espacio.
- Funciones de Economía: sustitución perfecta, Cobb-Douglas, CES, Leontief.

UNIDAD III

LÍMITE Y CONTINUIDAD

- Límite: concepto. Propiedades del límite doble. Álgebra de límites. Funciones que tienden a cero: propiedades. Teorema fundamental del límite.
- Cálculo de límites sucesivos, radiales y direccionales.
- Límite infinito. Generalización del límite.
- Continuidad en un punto. Propiedades. Continuidad en un conjunto; propiedades en un conjunto compacto.

UNIDAD IV

DERIVADAS PARCIALES. DERIVADA DIRECCIONAL. DIFERENCIABILIDAD.

- Incrementos. Derivada parcial de una función en un punto. Interpretación geométrica y gráfica de las derivadas parciales. Función derivada parcial. Generalización del concepto de derivada parcial.
- Aplicaciones: funciones marginales. Vector gradiente. Teorema del Valor Medio.
- Derivación sucesiva. Condición suficiente de las derivadas cruzadas.
- Derivada direccional: cálculo, interpretación vectorial. Derivada direccional máxima y mínima.
- Función diferenciable: definición. Propiedades; condición suficiente de diferenciable. Diferencial total. Diferencial sucesivo.
- Aplicaciones. Plano tangente y recta normal.

UNIDAD V

FUNCIONES COMPUESTAS E IMPLÍCITAS

- Funciones compuestas. Derivadas y diferenciales. Expresión matricial. Regla de la cadena. Aplicaciones: Modelo de producción dinámica de Solow.
- Funciones implícitas: Derivadas y diferenciales. Aplicaciones.

UNIDAD VI

SISTEMAS DE FUNCIONES. FUNCIONES HOMOGÉNEAS

- Funciones definidas implícitamente por un sistema de funciones. Condiciones de existencia y derivabilidad. Derivadas y diferenciales.
- Funciones homogéneas: propiedades. Interpretación desde la Economía. Función de Cobb-Douglas. Funciones homotéticas; propiedad.

UNIDAD VII

FÓRMULAS DE TAYLOR Y MAC LAURIN PARA VARIAS VARIABLES

- Desarrollos en Fórmulas de Taylor y de Mac Laurin. Término complementario. Aproximación de funciones.

UNIDAD VIII

OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES

- Funciones convexas o cóncavas en subconjuntos convexas. Condiciones de convexidad o concavidad para funciones diferenciables. Hessiano.
- Funciones cuasiconvexas o cuasicóncavas.
- Extremos relativos libres. Condiciones necesaria y suficiente. Extremos absolutos.

UNIDAD IX

OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES

- Determinación del número de variables independientes. Método general.
- Método de Lagrange: función lagrangiana, hessiano orlado. Caso de varios vínculos.
- Interpretación económica del multiplicador de Lagrange. Problemas de optimización.

UNIDAD X

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

- Generalidades: definición de Ecuación Diferencial. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: orden y grado. Soluciones: general, particular y singular. Problemas que se pueden presentar.
- Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden: de variables separables, homogéneas, reductibles a homogéneas. Lineales; caso especial: análisis de convergencia y diagrama de fase. Ec. de Bernoulli. Ec. diferenciales exactas.
- Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior. Valores iniciales. Teorema de existencia y unicidad. Ec. Homogéneas. Teoremas. Independencia lineal de funciones: wronskiano. Resolución de Ec. de Coeficientes Constantes: raíces reales distintas, reales múltiples y complejas. Comportamiento de las soluciones. Teorema de Routh. Ec. Completas. Teorema Fundamental. Método de los coeficientes indeterminados.
- APLICACIONES: Modelo de ajuste de precios de Evans. Modelo de crecimiento de Solow. Modelo de la carga de la deuda de Domar.

UNIDAD XI

ECUACIONES EN DIFERENCIAS

- Generalidades: Concepto de funciones de variable discreta. Diferencia finita de 1º orden. Diferencias finitas sucesivas. Operadores: diferencia, identidad, desplazamiento. Fórmulas. Concepto de Ecuaciones en Diferencias Finitas: orden, grado. Expresión usual. Solución de una Ecuación en Diferencias: general y particular.

- Ecuaciones en Diferencias Lineales de primer orden. Homogénea. Comportamiento de las soluciones. Completa. Teorema Fundamental. Método de los coeficientes indeterminados. Estabilidad del equilibrio. Diagrama de fase.
- Ecuaciones en Diferencias Lineales de Orden Superior. Teoremas. Independencia lineal de las soluciones. Ec. de Coeficientes Constantes. Soluciones de la Ec. Homogénea: raíces reales distintas, múltiples y complejas. Comportamiento de las soluciones. Condiciones para la ecuación de segundo orden. Teorema de Schur. Ec. Completa. Método de los coeficientes indeterminados. Equilibrio.
- APLICACIONES: Modelo del crecimiento del Ingreso Nacional. Modelo de la Telaraña. Modelo de Samuelson. Ecuación Logística discreta. Aplicaciones a la Matemática Financiera.

C- 2 - PROGRAMA DE EXAMEN

UNIDAD I

- Puntos de un conjunto. Entorno en \mathbb{R}^n .
- Funciones marginales. Vector gradiente. Teorema del valor medio.
- Sistemas de funciones, con dos variables independientes.
- Extremos ligados: método de Lagrange. Interpretación económica del lagrangiano.
- Ecuaciones Diferenciales: generalidades. Ecuaciones de orden superior: teoremas.
- Ecuaciones en Diferencias de primer orden, completas.
- Modelo de la carga de la deuda de Domar.

UNIDAD II

- Límite infinito. Generalización del límite.
- Derivada parcial de una función en un punto. Función derivada parcial.
- Funciones homogéneas.
- Extremos relativos ligados, con una variable independiente. Método general.
- Ecuaciones Diferenciales, de orden superior, completas. Comportamiento de las soluciones.
- Ecuaciones en Diferencias lineales, de primer orden, homogéneas. Diagrama de fase.
- Modelo de ajuste de precios de Evans.

UNIDAD III

- Continuidad en un punto y en un conjunto.
- Derivada direccional.
- Función implícita, con una variable independiente.
- Concavidad y convexidad de funciones. Extremos libres, con dos variables independientes.
- Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden: lineales y exactas.
- Ecuaciones en Diferencias lineales, de orden superior. Análisis de convergencia.
- Modelo del Ingreso Nacional.

UNIDAD IV

- Puntos de un conjunto. Clasificación de conjuntos.
- Funciones compuestas, con una variable independiente.
- Fórmula de Taylor.
- Extremos ligados. Método de Lagrange; caso de varios vínculos.
- Ecuaciones Diferenciales de primer orden de Bernoulli.

- f) Ecuaciones en Diferencias lineales, de orden superior: teoremas. Ec. Homogéneas.
- g) Modelo de Samuelson.

UNIDAD V

- a) Función de varias variables. Dominio. Representación por trazas y por curvas de nivel.
- b) Función diferenciable.
- c) Función homotética.
- d) Funciones cuasicóncavas y cuasiconvexa. Propiedades.
- e) Ecuaciones Diferenciales de orden superior. Comportamiento de las soluciones.
- f) Ecuaciones en Diferencias lineales, de primer orden, completas. Diagrama de fase.
- g) Modelo de crecimiento de Solow.

UNIDAD VI

- a) Cálculo de límites sucesivos, radiales y direccionales.
- b) Derivación y diferenciación sucesiva.
- c) Funciones definidas por un sistema de funciones, con una variable independiente.
- d) Estudio de concavidad y convexidad en función Cobb-Douglas. Extremos libres.
- e) Ecuaciones Diferenciales de primer orden: Homogéneas, reducibles a Homogéneas.
- f) Ecuaciones en Diferencias, de orden superior, completas. Teorema de Schur.
- g) Modelo de la ecuación logística discreta.

UNIDAD VII

- a) Superficies geométricas en \mathbb{R}^3 : esférica, elíptica, hiperbólica, parabólica, cilíndrica.
- b) Funciones compuestas, de dos variables independientes.
- c) Desarrollo de funciones en Fórmula de Mac Laurin.
- d) Extremos libres para una función de tres variables independientes.
- e) Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden superior. Wronskiano.
- f) Ecuaciones en Diferencias. Generalidades. Operadores. Soluciones.
- g) Modelo de la telaraña.

UNIDAD VIII

- a) Límite: concepto. Propiedades del límite doble. Álgebra de límites.
- b) Plano tangente y recta normal a una superficie.
- c) Funciones implícitas, con dos variables independientes.
- d) Extremos condicionados. Método de Lagrange. Estudio por incrementos.
- e) Ecuaciones Diferenciales de orden superior, teorema de Routh.
- f) Ecuaciones en diferencias de primer orden. Diagrama de fase.
- g) Sistema francés de amortización.

D - BIBLIOGRAFÍA

1- Obligatoria:

1. GONZÁLEZ de RIBA, M.- LONGÁS de MALLAR, R.- ANGELLELI de FURLANI, A. (2000) *Serie de Textos Interactivos: Cálculo II* . Argentina, CompuMat.
2. GONZÁLEZ, M.- LONGÁS, R.- ANGELLELI, A. (2012) *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con aplicaciones a la Economía*. Alemania, Editorial Académica Española, Lap Lambert Academic Publishing.

3. STEWART, James, (1999) *Cálculo Multivariable*. México, Internacional Thomson Editores.
4. RABUFFETTI, Hebe, (1.983) *Introducción al Análisis Matemático (Cál. II)*. Buenos Aires, Editorial El Ateneo.
5. SYDSAETER, Knut y HAMMOND, Peter, (1996) *Matemática para el Análisis Económico*, Madrid, Prentice Hall.
6. BLANCHARD P., DEVANEY R., HALL G. (1999) *Ecuaciones Diferenciales*, México, Internacional Thomson Editores.
7. TAKAHASHI, Takehito, (1.990) *Ecuaciones en Diferencias con Aplicaciones* México, Editorial Iberoamérica.

2- Complementaria:

8. BALBAS A., GIL J., GUTIÉRREZ S. (2003) *Análisis Matemático para la Economía II*, España, Editorial AC.
9. BESADA M., GARCÍA F., MIRÁS M., VÁZQUEZ C. (2001) *Cálculo de varias variables – Cuestiones y ejercicios resueltos*, España , Prentice Hall.
10. BARBOLLA R., CERDÁ E., SANZ P. (2001) *Optimización*, España , Prentice Hall.
11. BERNARDELLO, Alicia y otros (2004) *Matemática para Economistas con Excel y Matlab*, 1ª ed., Buenos Aires, Omicrom System.
12. CURTIS, Philip, (1.979) *Cálculo de varias variables con Algebra Lineal*. México, Editorial Limusa.
13. CHIANG, Alpha C. (1.994) *Métodos fundamentales de Economía Matemática*. México, Mc. Graw Hill.
14. WEBER, Jean E. (1.984) *Matemáticas para Administración y Economía* México, Editorial Harla.
15. HAEUSSLER, Ernest y PAUL, Richard (1997) *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. México, Prentice Hall Hispanoamericana.
16. SPIEGEL, Murray, (1983) *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas* Tercera Edición. México, Prentice Hall Hispanoamericana.

E - METODOLOGIA DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

La modalidad de enseñanza-aprendizaje obedece al Tipo 3: Taller, según lo que establece la Ord. Nª 16/03 CS. Se realizará el desarrollo teórico – práctico en el gabinete de computación, con el auxilio de los textos interactivos ejecutados por la cátedra, con el soporte del software “*Mathematica*”, ante la presencia conjunta de la Profesora Titular y una Profesora J.T.P.

En los textos, disponibles en las computadoras en red, el alumno encontrará el desarrollo y explicaciones de los temas teóricos, con ejemplos e interpretaciones gráficas. Al mismo tiempo encontrará propuestas para completar o contestar, como así también el planteo de ejercicios prácticos que deberá resolver. Las profesoras no desarrollarán los temas ni ejercicios sino que orientarán y ayudarán a los alumnos, para que éstos logren su propio aprendizaje.

También se trabajará a distancia, por Internet, a través del Campus Virtual de la UNCuyo, como apoyo de la clase presencial (b-learning), con las siguientes experiencias:

- 1- Módulo RAC: consiste en material de repaso sobre Álgebra, Álgebra Lineal, Cálculo, Geometría e Historia. Contiene material de estudio y actividades que deben resolver y enviar para su aprobación.
- 2- Unidad N° 10 del programa correspondiente al tema Ecuaciones Diferenciales.
- 3- Unidad N° 11 del programa correspondiente al tema Ecuaciones en Diferencias.
- 4- Unidad N° 8 del programa correspondiente al tema Optimización sin restricciones.
- 5- Unidad N° 9 del programa correspondiente al tema Optimización con restricciones.

El material de estudio de estas unidades no estará en la red interna de la facultad sino que el alumno podrá acceder a distancia, ingresando al Campus Virtual de la Universidad. No se requiere para esto del software *Mathematica*, aunque se podrá utilizar para la resolución de los ejercicios. Las actividades realizadas en esta instancia permiten realizar un seguimiento tutorial continuo.

Se darán seis horas semanales teórico – prácticas, durante quince semanas.

Se dividirán los alumnos en comisiones de tal manera que cada alumno trabaje individualmente en una computadora, con la presencia conjunta de la Profesora Titular y una Profesora J.T.P.

F – EVALUACIÓN Y CONDICIONES DE REGULARIDAD

a- Al finalizar el cursado resultará con la condición de **Regular** el alumno que apruebe las siguientes instancias de evaluación de proceso:

1. Asistencia: deberá haber asistido a no menos del 75% de las clases.
2. Parciales: existirán dos pruebas parciales que se aprueban con el 60% del puntaje total. Se debe reunir 30% en la parte de teoría y 30% de la parte práctica, como mínimo.
Habrá una oportunidad de recuperación para una sola de ellas.
3. Deberá cumplir satisfactoriamente los controles (sesiones de trabajo 1, 2, 3, 4, 5) del Módulo a Distancia RAC (Repaso Álgebra, Cálculo, Geometría e Historia) y las actividades propuestas en las unidades 8, 9, 10 y 11, realizados a través del Campus Virtual de la UNCuyo.
Las actividades enviadas por los alumnos permiten realizar una evaluación continua.

4. Ficha: aprobación de ejercicios prácticos resueltos con computadora, con el software *Mathematica*. El primer día de clase se entregará al alumno una ficha con cuatro ejercicios, que deberá aprobar demostrando el manejo del software utilizado.

b- El alumno que al finalizar el cursado no apruebe los parciales, podrá acceder a la Regularidad rindiendo un Examen Integrador, según las condiciones establecidas en el artículo Duodécimo del Anexo de la Ord. N° 18/03-C.D y modif.. En ese caso deberá cumplir los requisitos 3. y 4. del alumno regular.

G – APROBACIÓN DE LA MATERIA

1- Alumno Regular:

Si el alumno alcanzó las condiciones de regularidad, podrá aprobar la materia con un Examen Final.

Características del examen final:

Examen teórico - práctico escrito. Se aprueba con el 60% del puntaje total, debiendo reunir 30% en la parte de teoría y 30% en la parte práctica, como mínimo.

Si la cantidad de alumnos no fuera superior a diez se podrá examinar en forma oral, según programa de examen.

2- Alumno Libre: deberá aprobar las siguientes instancias:

- a) Presentación escrita de un trabajo de aplicación, con empleo del programa *Mathematica*.
- b) Aprobación del trabajo mencionado en a), en exposición oral, hasta 5 (cinco) días hábiles anteriores a la fecha prevista para el examen final.
- c) Examen final: 1° - examen escrito de ejercicios prácticos;
2° - aprobada la instancia anterior se examinará la teoría en forma oral, según programa de examen.

No superar alguna de estas instancias implicará la no aprobación de la asignatura.

H - CRITERIOS DE EVALUACIÓN

En todas las evaluaciones escritas (parciales, integrador o final) se interrogará sobre desarrollos teóricos y prácticos, constituyendo cada una de estas partes un 50% del total.

En los exámenes finales orales el alumno sacará al azar dos unidades, correspondientes al programa de examen. Elegirá una de ellas, pudiendo ser interrogado sobre la otra unidad si fuera necesario. Se solicitará el desarrollo de temas teóricos y resolución de ejercicios prácticos.

Se considerará la claridad de las respuestas, el correcto uso de los términos, la fundamentación adecuada de las respuestas y la coherencia en los desarrollos. En los ejercicios prácticos se considerará la correcta interpretación del tema, el procedimiento aplicado en la resolución, la claridad y precisión de la respuesta.

En todos los casos se ajustará a las pautas y procedimientos establecidos en la Ord. N° 10/05 - CD. Se tendrá en cuenta el Régimen Académico de Ciencias Económicas establecido por Ord. N°18/03-CD, modific. Ord.N° 7/06-CD.

La nota obtenida en cada instancia se ajustará a la escala de calificaciones que establece la Ord. 108/10 CS de la Universidad Nacional de Cuyo:

RESULTADO	ESCALA NUMERICA	ESCALA CONCEPTUAL
	NOTA	%
NO APROBADO	0	0%
	1	de 1% a 12%
	2	de 13% a 24%
	3	de 25% a 35%
	4	de 36% a 47%
	5	de 48% a 59%
APROBADO	6	de 60% a 64%
	7	de 65% a 74%
	8	de 75% a 84%
	9	de 85% a 94%
	10	de 95% a 100%

I – SISTEMA DE CALIFICACIÓN FINAL

1. Alumno Regular:

a) Si el alumno alcanzó la regularidad durante el cursado:

La nota final (NF) surgirá de la ponderación de las actividades establecidas anteriormente, según la siguiente fórmula:

$$NF = 0,15 P1 + 0,15 P2 + 0,10 F + 0,60 EF$$

(P1: parcial 1 - P2: parcial 2 - F: ficha - EF: examen final)

b) Si el alumno alcanzó la regularidad por el art. 12 del Anexo de la Ord. N° 18/03-C.D.:

La nota final (NF) surgirá de la ponderación de las instancias establecidas anteriormente, según la siguiente fórmula:

$$NF = 0,30 EI + 0,10 F + 0,60 EF$$

(EI: examen integrador - F: ficha - EF: examen final)

El puntaje total del alumno que no aprobó el examen final será el obtenido en esa instancia.

2. Alumno Libre:

La nota final (NF) surgirá de la ponderación de las instancias establecidas anteriormente, según la siguiente fórmula:

$$NF = 0,30 T + 0,70 EF$$

T: trabajo final EF: examen final

El puntaje total del alumno que no aprobó el examen final será el obtenido en esa instancia.

Mgter. Mirta Susana González